TD 24 : Dimension des espaces vectoriels

Familles libres, génératrices et bases

▶ Exercice 1 ref 1 : Dans $\mathbb{R}^3$ on pose $\mathcal{F} = (u, v, w)$ avec $u = (1, -1, 1)$, $v = (0, -1, 2)$ et $w = (1, -2, 3)$.

1. La famille $\mathcal{F}$ est-elle liée (voir D4 du cours) ? Déterminer une base de $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$, c'est-à-dire trouver une famille à la fois génératrice de F et libre dans $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}$ (voir D5).
2. Soit le sous-espace vectoriel $G = \{(x, y, z) \mid x + 2y + z = 0\}$. En donner une base (voir D5). Montrer que $G = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

▶ Exercice 2 ref 2 : On pose $Q_0 = 3$, $Q_1 = 2X$, $Q_2 = X^3 + X$, $Q_3 = X^3$ et $Q_4 = X^2 + 1$.
La famille $(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$ est-elle libre ? génératrice ? une base de $\mathbb{R}_3[X]$? On reviendra aux définitions D2, D3 et D5 du cours).

▶ Exercice 3 ref 3 : Trouver une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ suivant :
$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - z = 0, x - y = 0, t = 0\}$.

▶ Exercice 4 ref 5 : La famille $((1, 1, -1), (2, 1, 3), (0, -1, 5))$ est-elle libre ? Génératrice de $\mathbb{R}^3$? Quelle est la dimension de l'espace vectoriel que cette famille engendre ?

▶ Exercice 5 ref 6 : Dans $\mathbb{R}^4$, espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on considère les trois vecteurs :
$u = (1, 1, 0, -1)$, $v = (1, 0, 0, -1)$ et $w = (1, 0, -1, 0)$.
On pose $F = \mathrm{Vect}(\{u, v, w\})$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z + 2t = 0\}$.

1. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une base respectivement de F, de G, de $F + G$ et de $F \cap G$.

▶ Exercice 6 ref 8 :

1. Montrer que la famille $(1, \cos, \sin)$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. La fonction $x \mapsto x$ appartient-elle à $\mathrm{Vect}(1, \cos, \sin)$?

▶ Exercice 7 ref 24 : Soit F l'ensemble des suites réelles u telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Déterminer une base de F.

Applications linéaires dans des espaces de dimension finie

▶ Exercice 8 ref 10 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$, F et G deux sous-espaces de E. On pose :
$\phi : F \times G \longrightarrow E,\ (u, v) \mapsto u + v$ et $\psi : F \cap G \longrightarrow \ker\phi,\ u \mapsto (u, -u)$.

1. Vérifier que ϕ est linéaire
2. Montrer que ψ est un isomorphisme. En déduire $\dim \ker\phi = \dim(F \cap G)$.
3. En appliquant le théorème du rang à ϕ, retrouver la formule de Grassmann.

▶ Exercice 9 ref 11 : Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces-vectoriels de dimension finie et G un sous-espace de E.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{G} = \{u \in \mathcal{L}(E, F) \mid G \subset \ker u\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$.
2. Calculer la dimension de $\mathcal{G}$ en fonction de $\dim E$, $\dim F$ et $\dim G$.

► Exercice 10 ref 12 : Soit $\phi : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1},\ P \mapsto (P(0), P(1), \dots, P(n))$.
Montrer que ϕ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

► Exercice 11 ref 13 : Soient trois espaces vectoriels de dimensions finie E, F et G. On considère de plus $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$, $\psi \in \mathcal{L}(F, G)$. En utilisant la restriction de ψ à $\mathrm{Im}\phi$, montrer que :
$\dim(\mathrm{Im}\phi \cap \ker\psi) = \dim \mathrm{Im}\phi - \dim \mathrm{Im}(\psi \circ \phi)$.

Endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie

► Exercice 12 ref 14 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f((x, y, z)) = (x', y', z')$ tel que
$x' = y + z$
$y' = x + y + z$
$z' = x$.

1. Donner les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et déterminer des bases de $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$.
2. Soit $u = (0, -1, 1)$, $v = (1, 0, -1)$ et $w = (2, 3, 1)$. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les formules analytiques de f dans cette base.

► Exercice 13 ref 15 : Soient f et g deux endomorphismes dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tels que $f \circ g = 0$. Montrer que $\mathrm{rg} f + \mathrm{rg} g \leq n$.

► Exercice 14 ref 16 : Soit $E = \mathbb{K}^3$ et $\phi \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\phi^3 = 0$ et $\phi^2 \neq 0$.

1. Montrer que, pout tout vecteur u_0 tel que $\phi^2(u_0) \neq 0$, $(u_0, \phi(u_0), \phi^2(u_0))$ est une base de E.
2. En déduire que tous les endomorphismes de E qui commutnent avec ϕ sont de la forme $\alpha \mathrm{id_E} + \beta\phi + \gamma\phi^2$, α, β et γ étant des éléments quelconques de $\mathbb{K}$.

► Exercice 15 ref 18 : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n et soient $(\phi, \psi) \in (\mathcal{L}(E))^2$ qui vérifient les deux assertions :
$\phi \circ \psi \circ \phi = \phi$ et $\psi \circ \phi \circ \psi = \psi$.

1. Montrer que $\phi \circ \psi$ et $\psi \circ \phi$ sont deux projecteurs.
2. Montrer que $\mathrm{Im}\phi = \mathrm{Im}(\phi \circ \psi)$ et que $\mathrm{Im}\psi = \mathrm{Im}(\psi \circ \phi)$.
3. En déduire que $\mathrm{rg}\psi = \mathrm{rg}\phi$.

► Exercice 16 ref 21 :E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $p \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :
p projecteur $\Longleftrightarrow (\mathrm{rg} p + \mathrm{rg}(p - \mathrm{id_E}) = n)$.

► Exercice 17 ref 22 : On définit l'application $f : (x, y, z) \mapsto (x + z, y - 2x, x + 3z)$, de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que l'application f est linéaire.
2. Montrer que l'application f est un isomorphisme.

► Exercice 18 ref 23 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 et $\phi \in GL(E)$ tel que $\phi^2 = -\mathrm{id_E}$.

1. Soit u un vecteur non nul de E. Montrer que la famille $(u, \phi(u))$ est libre.
2. Si w est un vecteur de E tel que la famille $(u, \phi(u), w)$ soit libre alors prouver que $\beta = (u, \phi(u), w, \phi(w))$ est une base de E.
3. Exprimer les coordonnées de l'image par ϕ d'un vecteur dans la base β.