

Exercice 1

On note $p : x \mapsto e^x = \exp(x)$, $q : x \mapsto e^{2x} = \exp(2x)$ et $r : x \mapsto e^{x^2} = \exp(x^2)$.

On note $\mathcal{B} = (p, q, r)$ et $\mathcal{E}$ le sous-espace vectoriel de $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par la famille $\mathcal{B}$.

Dans cet exercice, on se propose de prouver que $\mathcal{B}$ est une famille libre sur $\mathbb{R}$, au moyen de diverses méthodes ; soit donc a , b et c trois réels tels que $ap + bq + cr = \mathbf{0}$ (où $\mathbf{0}$ désigne la fonction nulle). Notre but est de montrer que $a = b = c = 0$.

1. L'étudiant Antoine a évalué l'expression $(ap + bq + cr)(x)$ pour $x = 0$, $x = 1$ et $x = 2$.

Suivez sa démarche en l'expliquant, et concluez.

2. L'étudiant Nicolas a observé le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de l'application $ap + bq + cr$.

Faites comme lui et concluez.

3. L'étudiant Luc a eu une autre idée : il s'est intéressé au comportement de chacune des trois fonctions p , q , r au voisinage de $+\infty$.

Reconstituez sa méthode et concluez.

4. Si F est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E , on appelle base du sous-espace vectoriel F une famille de E libre sur $\mathbb{R}$ et génératrice de ce sous-espace vectoriel. Dans le cas où on obtient une base de F qui contient un nombre fini d'éléments, on dit que le sous-espace vectoriel F est de dimension finie. On montrera dans le cours que toutes les bases d'un sous-espace vectoriel F de dimension finie ont le même cardinal, et on appellera dimension de F ce cardinal.

Revenons à l'exercice. Déterminez la dimension de $\mathcal{E}$.

On note ψ l'application qui, à $f \in \mathcal{E}$, associe le triplet de réels $(f(0), f'(0), f(1))$.

5. Prouvez que ψ est un isomorphisme du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{E}$ sur le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On commencera par montrer que ψ est linéaire, puis on déterminera son noyau et son image.
6. Soit $f = ap + bq + cr$ un élément de $\mathcal{E}$.

Exprimez a , b et c en fonction de $f(0)$, $f'(0)$ et $f(1)$.

Exercice 2

Les questions sont obligatoires jusqu'à la question 7.a.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $t + \sin t = 0$.
2. Pour tout réel t tel que $t + \sin t \neq 0$, on pose :

$$\psi(t) = \frac{1}{t + \sin t}.$$

Montrer que l'intégrale $\int_x^{2x} \psi(t) dt$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

On notera $f(x)$ sa valeur.

L'objet de ce problème est l'étude de la fonction f associée, définie sur $\mathbb{R}^*$.

3. Etudier la parité de f .
4. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$, et calculer $f'(x)$ sous forme factorisée pour $x > 0$.
5. En déduire le sens de variation de f sur $]0, +\infty[$.
6. On cherche à étudier le comportement de f au voisinage de $+\infty$.

(a) Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\left| f(x) - \int_x^{2x} \frac{dt}{t} \right| \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{t(t + \sin t)}.$$

(b) Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que, pour tout $t \geq m$, on ait : $t + \sin t \geq \frac{t}{2}$.

(c) En déduire que $f(x)$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

7. On cherche à étudier le comportement de f au voisinage de 0.

(a) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$$\frac{1}{t + \sin t} = \frac{a}{t} + bt + o(t)$$

au voisinage de 0.

(b) Soit g une fonction de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = 0$. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sup_{t \in [x, 2x]} |g(t)| = 0.$$

(c) En déduire que si h est une fonction continue de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $h(x) = o(x)$ au voisinage de 0, alors $\int_x^{2x} h(t) dt = o(x^2)$ au voisinage de 0.

(d) Montrer que f admet au voisinage de 0 un développement limité à l'ordre 2 que l'on déterminera.

(e) Montrer que f peut se prolonger en 0 en une fonction dérivable (on notera encore f ce prolongement), et déterminer $f(0)$ et $f'(0)$.

(f) Quelle est, au voisinage de 0, la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0 ?

(g) Déterminer un équivalent simple de $f'(x)$ au voisinage de 0.

(h) En déduire que f est deux fois dérivable en 0, et calculer $f''(0)$.

8. Déterminer le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.