TD 22 cor

Ex 1 item 3 Voir livre blanc 22-8-3

item 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ avec $a=0, b=1, f: x \mapsto \sin(\pi x)$.

on reconnaît une somme de Riemann

or $f: x \mapsto \sin(\pi x)$ est continue sur $[0,1]$

donc (u_n) cv et sa limite est $\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx = \left[-\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\right]_0^1$

$= -\frac{\cos \pi}{\pi} + \frac{\cos 0}{\pi} = \frac{+2}{\pi}$.

item 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$u_n = n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} = \frac{n^2}{n^2 \times n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{(n+k)^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}$

$= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ où $a=0, b=1$ et $f: x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2}$

on reconnaît une somme de Riemann

or $f: x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est continue sur $[0,1]$

donc (u_n) cv et sa limite est $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2} = \left[-(1+x)^{-1}\right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

Ex 5 Voir livre blanc 22-8-2

Ex 6 Voir livre blanc 22-13

Ex 9 $u: t \mapsto \frac{t-a}{b-a}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et strt monotone sur $[a,b]$

donc on peut faire le changement de variable.

lorsque $t=a$, $u=0$ et lorsque $t=b$, $u=1$.

$du = \frac{1}{b-a}dt$ et $u = \frac{t-a}{b-a} \Leftrightarrow (b-a)u = t-a \Leftrightarrow t = (b-a)u + a \Leftrightarrow b-t = b-(b-a)u+a$

$\Leftrightarrow b-t = (b-a)(1-u)$

Ainsi $\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = \int_0^1 \frac{((b-a)(1-u))^n}{n!} f^{(n+1)}((b-a)u+a)\,(b-a)\,du$

$= (b-a)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}((b-a)u+a)\,du$

TD 22 cor

Ex 3

① Soit $n \in \mathbb{N}$

exp est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}^+$. En particulier elle est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}^+$.
On lui applique la formule de Taylor avec reste intégral en 0

Soit $x \geq 0$.

$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \exp^{(k)}(0) \frac{(x-0)^k}{k!} + \int_0^x \exp^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt$

$\exp(x) = S_n + \int_0^x e^t \frac{(x-t)^n}{n!} dt$

$\forall t \in [0,x]$ $e^t \frac{(x-t)^n}{n!} \geq 0$ donc par positivité de l'intégrale, comme $0 \leq x$ on a $\int_0^x e^t \frac{(x-t)^n}{n!} dt \geq 0$

Donc $\exp(x) - S_n \geq 0$ donc $\exp(x) \geq S_n$ et (S_n) est majorée par e^x
Par le th de la limite monotone, comme (S_n) est croissante * et majorée, elle CV.

* en effet $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \geq 0$ si $x \geq 0$

② Soit $x \in \mathbb{R}^+$

$|e^x - S_n| = \left| \int_0^x e^t \frac{(x-t)^n}{n!} dt \right| \leq \int_0^x |e^t| \frac{|x-t|^n}{n!} dt = \int_0^x e^t \frac{(x-t)^n}{n!} dt$

or $\forall t \in [0,x], 0 \leq e^t \leq e^x$ donc $\forall t \in [0,x]$ $e^t \frac{(x-t)^n}{n!} \leq e^x \frac{(x-t)^n}{n!}$

par croissance de l'intégral $(0 \leq x)$ on a $|e^x - S_n| \leq \int_0^x e^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt$

$$\leq \frac{e^x}{n!} \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^x$$

$$\leq \frac{e^x}{n!} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^+, 0 \leq |e^x - S_n| \leq \frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}$

Par le th des gendarmes, comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ (CC) $\forall x \in \mathbb{R}^+$, on en déduit que $\lim_{n \to +\infty} e^x - S_n = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$

Ainsi on montre de la même façon que $\lim_{n \to +\infty} e^x - S_n = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^-$

Concl : $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

③ Formule de Taylor-Young : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = S_n + x^n \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

Nous n'avons pas d'info précise sur la fct ε (infos locales au voisinage de 0)
Nous ne connaissons pas la nature de $(x^n \varepsilon(x))_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque $n \to +\infty$:
si $x \in]-1,1[$ cette suite CV mais sinon non...

(4) Soit $n \in \mathbb{N}$
cos est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$. En particulier elle est $\mathcal{C}^{2n+1}$ sur $\mathbb{R}^+$. On lui applique l'inégalité de Taylor Lagrange.
Soit $x \in \mathbb{R}^+$

$$\left| \cos(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \frac{|x-0|^{2n+1}}{(2n+1)!} \times M$$, où M est un majorant de $|\cos^{(2n+1)}|$ sur $[0,x]$. (clairement $M=1$ convient !)

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^+$ $$\left| \cos(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

De même $\forall x \in \mathbb{R}^-$ $$\left| \cos(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

or $$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0 \quad (CC)$$

Donc par le th des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos x - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

et $$\cos x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

TD22 cor

EV4

① Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$f : x \mapsto \ln(1+x)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$. En particulier elle est $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}^+$

On lui applique la formule de Taylor avec reste intégral en 0.

Soit $x \geqslant 0$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \int_0^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt.$$

$$\left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leq \int_0^x \left| f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} \right| dt.$$

or $\forall t \in [0,x]$, $f^{(n+1)}(t) = \dfrac{(-1)\times(-2)\times \dots \times(-n)}{(1+t)^{n+1}}$

$\forall t \in [0,x]$, $\left| f^{(n+1)}(t) \right| = \dfrac{n!}{(1+t)^{n+1}} \leq n!$

Ainsi $\left| \ln(1+x) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leq \displaystyle\int_0^x n! \frac{(x-t)^n}{n!} dt = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^x$

par croissance de l'intégrale.

Donc $\left| \ln(1+x) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leq \dfrac{(x)^{n+1}}{n+1} = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

② $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \geqslant 0 \qquad \left| \ln(1+x) - u_n \right| \leq \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

en particulier, si $x = 1$

$0 \leq \left| \ln 2 - u_n \right| \leq \dfrac{1}{n+1}$ donc par le théorème des gendarmes,

(u_n) CV vers $\ln 2$.

③ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $\dfrac{1}{n+1} \leq 10^{-3}$

ssi $n+1 \geqslant 10^3$ ssi $n \geqslant 999$

u_n est une approximation de $\ln 2$ à 10^{-3} près à partir de $n \geqslant 999$

puisqu'alors $\left| \ln 2 - u_n \right| \leq \dfrac{1}{n+1} \leq 10^{-3}$.

④ $(2u_n)$ CV vers $\ln 4 = 2 \ln 2$ et $\quad \left| 2\ln 2 - 2u_n \right| = 2 \left| \ln 2 - u_n \right| \leq \dfrac{2}{n+1} \ \forall n \geqslant 1$

$(-u_n)$ CV vers $\ln \frac{1}{2} = -\ln 2$ et $\quad \left| \ln \frac{1}{2} + u_n \right| = \left| \ln 2 - u_n \right| \leq \dfrac{1}{n+1} \ \forall n \geqslant 1$

Donc $2u_n$ est une approximation de $\ln 4$

et $-u_n$ ——————————— $\ln \frac{1}{2}$