

Ex 12 Soient E, F et G 3 Kev.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

- Mg $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E, G)} \Rightarrow \text{Im } f \subset \text{Ker } g$

Soit $y \in \text{Im } f$

$$\exists x \in E \text{ tq } y = f(x)$$

$$\Rightarrow g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = 0_{\mathcal{L}(E, G)}(x) = 0_G$$

$$\Rightarrow y \in \text{Ker } g$$

- Mg $\text{Im } f \subset \text{Ker } g \Rightarrow g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E, G)}$

Soit $x \in E$

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

or $f(x) \in \text{Im } f$ et $\text{Im } f \subset \text{Ker } g$

donc $f(x) \in \text{Ker } g$ donc $g(f(x)) = 0_G$

Donc $g \circ f(x) = 0_G$.

$$\forall x \in E, g \circ f(x) = 0_G \Rightarrow g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E, G)}$$

Ex 7 Soit f un H_{ker} . Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$.

- Mq $\text{Ker} f$ est stable par g .

Soit $x \in \text{Ker} f$ Mq $g(x) \in \text{Ker} f$

$$x \in \text{Ker} f \Rightarrow f(x) = 0_E \Rightarrow g(f(x)) = g(0_E) \Rightarrow g(f(x)) = 0_E$$

$$\text{or } g \circ f = f \circ g \text{ donc } f(g(x)) = 0_E \text{ donc } g(x) \in \text{Ker} f.$$

- Mq $\text{Im} f$ est stable par g

Soit $y \in \text{Im} f$. Mq $g(y) \in \text{Im} f$.

$$y \in \text{Im} f \Rightarrow \exists x \in E \text{ tq } y = f(x).$$

$$\Rightarrow g(y) = g(f(x)) \text{ or } f \circ g(x) = g \circ f(x)$$

$$\Rightarrow g(y) = f \circ g(x) \Rightarrow g(y) = f(g(x))$$

$$\Rightarrow \exists z \in E (z = g(x)) \text{ tq } g(y) = f(z) \Rightarrow g(y) \in \text{Im} f.$$