Corrigé du DM11

Exercice 1

On note $p : x \mapsto e^x = \exp(x)$, $q : x \mapsto e^{2x} = \exp(2x)$ et $r : x \mapsto e^{x^2} = \exp(x^2)$.

On note $\mathcal{B} = (p, q, r)$ et $\mathcal{E}$ le sous-espace vectoriel de $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par la famille $\mathcal{B}$.

Dans cet exercice, on se propose de prouver que $\mathcal{B}$ est une famille libre sur $\mathbb{R}$, au moyen de diverses méthodes ; soit donc a, b et c trois réels tels que $ap + bq + cr = \mathbf{0}$ (où $\mathbf{0}$ désigne la fonction nulle). Notre but est de montrer que $a = b = c = 0$.

1. L'égalité de fonctions $ap + bq + cr = 0$ appliquée pour $x = 0$, $x = 1$ et $x = 2$ donne que a, b et c sont solutions du système : $\begin{cases} a+b+c=0 \\ ea+e^2b+ec=0 \\ e^2a+e^4b+e^4c=0 \end{cases}$. L' opération $L_2 \leftarrow L_2 - eL_1$ donne $e(e-1)b = 0$ donc $b = 0$ puis on a $\begin{cases} a+c=0 \\ e^2a+e^4c=0 \end{cases}$ d'où $a = -c$ et $(e^2-1)c = 0$ ce qui donne $a = c = 0$.

2. Dans la question précédente, on a utilisé que $e \neq 0$ et $e \neq 1$ ce qui est une conséquence de $e > 1$. On peut justifier ceci en disant que e est l'unique antécédent de 1 par la fonction ln qui établit une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$. Or $\ln 1 < \ln e$ donc $1 < e$.

3. On a :

$$(ap+bq+rc)(x) \underset{0}{=} a\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) + b(1+2x+4x^2+o(x^2)) + c(1+x^2+o(x^2))$$

d'où

$$(ap+bq+rc)(x) \underset{0}{=} (a+b+c) + (a+2b)x + \left(\frac{a}{2}+4b+c\right)x^2 + o(x^2)$$

Or $ap+bq+cr = 0$ donc tous les termes de ce développement limité sont nuls. D'où $b = -\dfrac{a}{2}$ puis $c = \dfrac{3}{2}a$. En reportant dans $a+b+c = 0$, on obtient donc $a = 0$ puis $b = c = 0$.

4. En divisant par e^{x^2} l'égalité $(ap+bq+rc)(x) = 0$, on obtient pour tout x, $ae^{x-x^2}+be^{2x-x^2}+c = 0 \quad (1)$.
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x - x^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x - x^2 = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x-x^2} = 0$.
En faisant tendre x vers $+\infty$ dans (1), on obtient $c = 0$.
Il en résulte que pour tout x, $ae^{-x} + b = 0$. En faisant de nouveau tendre x vers $-\infty$, on a $b = 0$ puis $a = 0$.

5. La famille (p, q, r) engendre $\mathcal{E}$. De plus, elle est libre : c'est donc une base de $\mathcal{E}$. $\mathcal{E}$ est de dimension 3.

6. Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{E}$ et λ et μ deux réels .

$$\begin{aligned}\psi(\lambda f+\mu g) &= ((\lambda f+\mu g)(0),(\lambda f+\mu g)'(0),(\lambda f+\mu g)'(1))\\ &= (\lambda f(0)+\mu g(0),\lambda f'(0)+\mu g'(0),\lambda f(1)+\mu g(1))\\ &= \lambda(f(0),f'(0),f(1))+\mu(g(0),g'(0),g(1))=\lambda\psi(f)+\mu\psi(g)\end{aligned}$$

ψ est donc linéaire. De plus, soit $f = ap + bq + cr$ un élément de $\mathcal{E}$:

$$f \in \mathrm{Ker}(\psi) \Longleftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ a+2b=0 \\ ea+e^2b+ec=0 \end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3-eL_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a+b+c=0 \\ a+2b=0 \\ (e^2-e)b=0 \end{cases}$$

d'où $f \in \mathrm{Ker}\psi \leftrightarrow a = b = c = 0$ donc ψ est injective.
Soit (A,B,C) un élément de $\mathbb{R}^3$.

$$(A,B,C)\in \mathrm{Im}(\psi) \Longleftrightarrow \exists f \in \mathcal{E},\ \psi(\{) = (\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C})$$

$$\Longleftrightarrow \exists (a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \psi(ap+bq+r) = (A,B,C)$$

Or $\psi(ap + bq + r) = ((ap + bq + r)(0),(ap + bq + r)'(0),(ap + bq + r)(1))$.
Donc $\psi(ap + bq + r) = (a + b + c, a + 2b, ea + e^2b + ec)$.
Et

$$\begin{aligned}\psi(ap+bq+r)=(A,B,C) &\Longleftrightarrow \begin{cases} a+b+c=A \\ a+2b=B \\ ea+e^2b+ec=C \end{cases}\\ &\underset{\substack{L_3\leftarrow L_3-eL_1\\ L_1\leftarrow L_1-L_2}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} -b+c=A-B \\ a+2b=B \\ (e^2-e)b=C-eA \end{cases}\\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{2}{e-1}A+B-\dfrac{2}{e(e-1)}C \\ b=-\dfrac{1}{e-1}A+\dfrac{1}{e(e-1)}C \\ c=\dfrac{e-2}{e-1}A-B+\dfrac{1}{e(e-1)}C \end{cases}\end{aligned}$$

La proposition $\exists (a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \psi(ap+bq+r) = (A,B,C)$ est toujours vraie. Donc la proposition $(A,B,C)\in \mathrm{Im}(\psi)$ également. Ainsi on a montré que pour tout $(A,B,C)\in \mathbb{R}^3$, $(A,B,C)\in\mathrm{Im}(\psi)$, donc $\mathbb{R}^3 \subset \mathrm{Im}(\psi)$ et comme $\mathrm{Im}(\psi)\subset\mathbb{R}^3$, on en déduit que $\mathrm{Im}(\psi) = \mathbb{R}^3$ et que ψ est surjective.
Conclusion : ψ est un isomorphisme de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}^3$.

7. Soit $f = ap + bq + cr$ un élément de $\mathcal{E}$:

$$\psi(f) = (f(0), f'(0), f(1)) \iff \begin{cases} a+b+c = f(0) \\ a+2b = f'(0) \\ ea+e^2b+ec = f(1) \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - eL_1 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_2}}{\iff} \begin{cases} -b+c = f(0) - f'(0) \\ a+2b = f'(0) \\ (e^2-e)b = f(1) - ef(0) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = \dfrac{2}{e-1}f(0) + f'(0) - \dfrac{2}{e(e-1)}f(1) \\ b = -\dfrac{1}{e-1}f(0) + \dfrac{1}{e(e-1)}f(1) \\ c = \dfrac{e-2}{e-1}f(0) - f'(0) + \dfrac{1}{e(e-1)}f(1) \end{cases}$$

Remarque : $\psi^{-1}(\alpha,\beta,\gamma) = Cp + Dq + Er$ avec $\begin{cases} C = \dfrac{2}{e-1}\alpha + \beta - \dfrac{2}{e(e-1)}\gamma \\ D = -\dfrac{1}{e-1}\alpha + \dfrac{1}{e(e-1)}\gamma \\ E = \dfrac{e-2}{e-1}\alpha - \beta + \dfrac{1}{e(e-1)}\gamma \end{cases}$

Exercice 2

1. Soit φ la fonction $t \mapsto t + \sin t$, cette fonction est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée définie par $\varphi'(t) = 1 + \cos t$, donc positive, nulle seulement en les points isolés $(2k+1)\pi$, par conséquent φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle s'annule en l'unique point $t = 0$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, alors ψ est continue sur l'intervalle de bornes x et $2x$, qui ne contient pas 0, donc $f(x)$ existe.
3. Le changement de variable bijectif, de classe $\mathcal{C}^1, u = -t$ permet de montrer $f(-x) = \displaystyle\int_{-x}^{-2x} \frac{1}{t+\sin t}dt = \int_x^{2x} \frac{1}{-u-\sin u}(-du) = f(x)$, donc f est paire.
4. La fonction ψ étant continue sur $[x, 2x]$, la fonction f est dérivable, de plus,
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\frac{1}{2x+\sin 2x} - \frac{1}{x+\sin x} \\ &= \frac{2\sin x - \sin 2x}{(2x+\sin 2x)(x+\sin x)} = \frac{2\sin x(1-\cos x)}{(2x+\sin 2x)(x+\sin x)} \end{aligned}$$
Cette expression est celle d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$, donc f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
5. $f'(x)$ est du signe de $\sin x$, donc positif sur $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, négatif sinon. Ce qui permet de trouver le sens de variations de f.
6. Etude au voisinage de l'infini.
   (a) Pour $x > 0$, $\displaystyle\left|\int_x^{2x}\left(\frac{1}{t+\sin t} - \frac{1}{t}\right)dt\right| \leqslant \int_x^{2x}\left|\frac{\sin t}{t(t+\sin t)}\right|dt \leqslant \int_x^{2x}\frac{1}{t(t+\sin t)}dt$, car $|\sin t| \leqslant 1$ et $t + \sin t > 0$. Conclusion : $\displaystyle\left|f(x) - \int_x^{2x}\frac{1}{t}dt\right| \leqslant \int_x^{2x}\frac{1}{t(t+\sin t)}dt$.

(b) De $\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+\sin t}{t}\right)=1$, on déduit l'existence de $m>0$ tel que pour tout $t\geqslant m$, on ait $\frac{t+\sin t}{t}\geqslant\frac{1}{2}$, ce qui fournit le résultat demandé.

(c) De $t+\sin t\geqslant\frac{t}{2}$, on déduit $\left|f(x)-\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt\right|\leqslant\int_x^{2x}\frac{2}{t^2}dt=\frac{1}{x}$,
et donc $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt\right)=0$.
Or $\lim_{x\to+\infty}\left(\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt\right)=\ln 2$,
donc $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\ln 2$.

7. Comportement de f au voisinage de 0.

(a) Pour t voisin de 0,

$$\begin{aligned}\frac{1}{t+\sin t}&=\frac{1}{t+t-\frac{t^3}{6}+o(t^3)}\\&=\frac{1}{2t}\left(\frac{1}{1-\frac{t^2}{12}+o(t^2)}\right)=\frac{1}{2t}\left(1+\frac{t^2}{12}+o\left(t^2\right)\right)\\&=\frac{1}{2t}+\frac{t}{24}+o(t)\end{aligned}$$

(b) Traduisons l'hypothèse $\lim_{t\to0^+}g(t)=0$: $\forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0,0<t\leqslant\alpha\Rightarrow|g(t)|\leqslant\varepsilon$. Par conséquent, si on prend x vérifiant $0<x\leqslant\frac{\alpha}{2}$, alors pour tout t de $[x,2x]$, on a : $|g(t)|\leqslant\varepsilon$, et donc aussi $\sup_{t\in[x,2x]}|g(t)|\leqslant\varepsilon$. Il est donc clair que $\lim_{t\to0^+}\sup_{t\in[x,2x]}|g(t)|=0$.

(c) h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc l'intégrale $\int_x^{2x}h(t)\,dt$ existe, on suppose de plus que $h(x)=o(x)$, au voisinage de 0, ceci entraîne que pour $t>0,\lim_{t\to0}\frac{h(t)}{t}=0$, ou encore $h(t)=t\varepsilon(t)$ et $\lim_{t\to0}\varepsilon(t)=0$. Il en résulte :

$$\begin{aligned}\int_x^{2x}|h(t)|\,dt&\leqslant\int_x^{2x}|t\varepsilon(t)|\,dt\\&\leqslant 2x\int_x^{2x}|\varepsilon(t)|\,dt\\&\leqslant 2x\int_x^{2x}\sup_{t\in[x,2x]}|\varepsilon(t)|\,dt\\&\leqslant 2x^2\sup_{t\in[x,2x]}|\varepsilon(t)|=o\left(x^2\right)\end{aligned}$$

Finalement : $\int_x^{2x}h(t)\,dt=o\left(x^2\right)$.

(d) D'après c) $\int_x^{2x}\left(\frac{1}{2t}+\frac{t}{24}+o(t)\right)dt=\frac{1}{2}\ln 2+\left[\frac{t^2}{48}\right]_x^{2x}+o\left(x^2\right)=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{x^2}{16}+o\left(x^2\right)$.
Ce qui prouve que f admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0,

(e) Et par suite f admet un prolongement continu en 0, (on pose $f(0) = \frac{1}{2}\ln 2$), ce prolongement étant dérivable et de dérivée nulle en 0.

(f) Le D.L.$_2$ ci-dessus prouve que la courbe est au-dessus de sa tangente en 0(terme $\frac{x^2}{16}$) .

(g) Pour $x \neq 0$, on a $f'(x) = \dfrac{2\sin x\,(1-\cos x)}{(2x+\sin 2x)\,(x+\sin x)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{2x\frac{x^2}{2}}{4x2x} = \dfrac{x}{8}$

(h) $f''(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x) - f'(0)}{x} = \dfrac{1}{8}$.

8.

x	0		π		2π	...
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	...
$f(x)$	$\frac{1}{2}\ln 2$	$\nearrow$		$\searrow$		...

Tracé sur $[0, 4\pi]$: