TD 23 cor

Ex 5 Soit E un $\mathbb{K}$ev et f et g deux endomorphismes de E

- Montrons que $\ker f \subset \ker(g \circ f)$

  Soit $x \in \ker f$ alors $x \in E$ et $f(x) = 0_E$ donc $g(f(x)) = g(0_E)$
  or g est linéaire donc $g(0_E) = 0_E$. Ainsi $g(f(x)) = 0_E$ donc $g \circ f(x) = 0_E$
  et $x \in \ker(g \circ f)$

  En revanche l'inclusion réciproque n'est pas vraie en général :
  si $f = id_E$ et $g = 0_{\mathcal{L}(E)}$ alors $\ker(g \circ f) = E$ et $\ker f = \{0_E\}$
  donc $\ker(g \circ f) \not\subset \ker f$.

- Montrons que $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\, g$

  Soit $y \in \mathrm{Im}(g \circ f)$ alors $\exists x \in E$ tq $y = g \circ f(x)$
  On a donc $y = g(f(x))$ donc $\exists z \in E$ $(z = f(x))$ tq $y = g(z)$
  et $y \in \mathrm{Im}\, g$.

  En revanche l'inclusion réciproque n'est pas vraie en général :
  si $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $g = id_E$ alors $\mathrm{Im}(g \circ f) = \{0_E\}$ et $\mathrm{Im}\, g = E$
  donc $\mathrm{Im}\, g \not\subset \mathrm{Im}(g \circ f)$

- $(\ker(f^n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante pour l'inclusion :
  $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ker(f^n) \subset \ker(f^{n+1})$ car $f^{n+1} = f \circ f^n$
  ($\ker f^n \subset \ker(g \circ f^n)$ avec $g \leftarrow f$)

  $(\mathrm{Im}(f^n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante pour l'inclusion :
  $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}(f^{n+1}) \subset \mathrm{Im}(f^n)$ car $f^{n+1} = f^n \circ f$
  ($\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$)
  avec $g \leftarrow f^n$

TD 23 cor

ex 6

① f n'est pas linéaire car :

$$\left.\begin{array}{l} f(1,0)+f(0,1) = 1\times 0+0\times 1 = 0+0=0 \\ f((1,0)+(0,1)) = f(1,1) = 1\times 1 = 1 \end{array}\right] \Rightarrow f(1,0)+f(0,1) \neq f((1,0)+(0,1))$$

② $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\ \forall (x',y')\in\mathbb{R}^2\ \forall \alpha\in\mathbb{R},\ f(\alpha(x,y)+(x',y')) = f(\alpha x+x', \alpha y+y')$
$= \alpha x+x'+\alpha y+y' = \alpha(x+y)+x'+y'$
$= \alpha f(x,y)+f(x',y') \Rightarrow f$ est lin

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$(x,y)\in \mathrm{Ker} f$ ssi $f(x,y)=0_{\mathbb{R}}$ ssi $x+y=0$ ssi $y=-x$ ssi $(x,y)=(x,-x)=x(1,-1)$ avec $x\in\mathbb{R}$

$\mathrm{Ker} f=\{x(1,-1),\ x\in\mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(u)$ où $u=(1,-1)$.

③ $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\ \forall (x',y')\in\mathbb{R}^2\ \forall \alpha\in\mathbb{R},\ f(\alpha(x,y)+(x',y')) = f(\alpha x+x', \alpha y+y')$
$= (\alpha x+x'+\alpha y+y', \alpha x+x')$
$= (\alpha x+\alpha y, \alpha x)+(x'+y', x') = \alpha(x+y,x)+(x'+y',x')$
$= \alpha f(x,y)+f(x',y') \Rightarrow f$ est lin

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$(x,y)\in\mathrm{Ker} f$ ssi $f(x,y)=0_{\mathbb{R}^2}$ ssi $(x+y,x)=(0,0)$ ssi $\begin{cases} x+y=0 \\ x=0\end{cases}$ ssi $x=y=0$ ssi $(x,y)=(0,0)$

$\mathrm{Ker} f=\{0_{\mathbb{R}^2}\} \Rightarrow f$ est injective

④ f n'est pas linéaire car $f(1,0)+f(-1,0) = (1,0)+(1,0) = (2,0)$
$f((1,0)+(-1,0)) = f(0,0) = (0,0)$

⑤ f n'est pas linéaire car $f(X)+f(-X) = \deg(X)+\deg(-X) = 1+1=2$
$f(X+(-X)) = f(0) = \deg(0) = -\infty$

⑥ $\forall h\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}),\ \forall g\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}),\ \forall\alpha\in\mathbb{R}\quad f(\alpha h+g) = (\alpha h+g)''+4(\alpha h+g)$
$= \alpha h''+g''+\alpha 4h+4g$
$= \alpha(h''+4h)+g''+4g$
$= \alpha f(h)+f(g)$.

Soit $h\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$

$h\in\mathrm{Ker} f$ ssi $f(h)=0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ ssi $h''+4h=0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$

(EC : $r^2+4=0$ a 2 racines : $2i$ ou $-2i$)

ssi $\exists (A,B)\in\mathbb{R}^2$ tq $\forall x\in\mathbb{R},\ h(x) = e^{0x}(A\cos 2x+B\sin 2x) = A\cos 2x+B\sin 2x$

$\mathrm{Ker} f = \{x\mapsto A\cos 2x+B\sin 2x,\ (A,B)\in\mathbb{R}^2\}$

⑦ f n'est pas linéaire car $f(2\,id_E)(x) = 2^2+4x\quad \forall x\in\mathbb{R}$

or $2f(id_E)(x) = 2+4x\ \forall x$. On n'a pas $f(2id_E) = 2f(id_E)$

TD23 cor

Ex 7 Soit E un $\mathbb{K}$ev. Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$.

- Mq $\mathrm{Ker} f$ est stable par g.

Soit $x \in \mathrm{Ker} f$ Mq $g(x) \in \mathrm{Ker} f$

$x \in \mathrm{Ker} f \Rightarrow f(x) = 0_E \Rightarrow g(f(x)) = g(0_E) \overset{g \text{ lin}}{\Rightarrow} g(f(x)) = 0_E$

or $g \circ f = f \circ g$ donc $\begin{cases} f(g(x)) = 0_E \\ g(x) \in E \end{cases}$ donc $g(x) \in \mathrm{Ker} f$.

- Mq $\mathrm{Im} f$ est stable par g

Soit $y \in \mathrm{Im} f$. Mq $g(y) \in \mathrm{Im} f$.

$y \in \mathrm{Im} f \Rightarrow \exists x \in E$ tq $y = f(x)$.

$\Rightarrow g(y) = g \circ f(x)$ or $f \circ g(x) = g \circ f(x)$

$\Rightarrow g(y) = f \circ g(x) \Rightarrow g(y) = f(g(x))$

$\Rightarrow \exists z \in E$ $(z = g(x))$ tq $g(y) = f(z) \Rightarrow g(y) \in \mathrm{Im} f$.

TD23 cor

ex. 8 :

1. • Mq $\mathrm{Ker}(v\circ u) = \mathrm{Ker}\, u \Rightarrow \mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v = \{0_E\}$

Soit $x \in \mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v$

Alors $\left.\begin{array}{l} x \in \mathrm{Im}\, u \Rightarrow \exists t \in E \text{ tq } x = u(t) \\ \text{et } x \in \mathrm{Ker}\, v \Rightarrow v(x) = 0_E \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} v(x) = v(u(t)) \\ v(x) = 0_E \end{array}\right.$

Donc $v\circ u(t) = 0_E$ $\boxed{\mathrm{Ker}(v\circ u) = \mathrm{Ker}\, u}$

donc $t \in \mathrm{Ker}(v\circ u) \Rightarrow t \in \mathrm{Ker}\, u$.

Donc $u(t) = 0_E$ donc $x = 0_E$ (puisque $x = u(t)$)

On a mq $\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v \subset \{0_E\}$

or $\{0_E\} \subset \mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v$ car l'intersection de 2 sev de E est un sev de E.

Donc $\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v = \{0_E\}$

• Mq $\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v = \{0_E\} \Rightarrow \mathrm{Ker}(v\circ u) = \mathrm{Ker}\, u$

on sait déjà que $\mathrm{Ker}\, u \subset \mathrm{Ker}(v\circ u)$ (voir ex 5)

Mq $\mathrm{Ker}(v\circ u) \subset \mathrm{Ker}\, u$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(v\circ u)$ Alors $v\circ u(x) = 0_E$ càd $v(u(x)) = 0_E$

$\left.\begin{array}{l} \text{donc } u(x) \in \mathrm{Ker}\, v \\ \text{or } u(x) \in \mathrm{Im}\, u \end{array}\right] \Rightarrow u(x) \in \mathrm{Ker}\, v \cap \mathrm{Im}\, u$

or $\mathrm{Ker}\, v \cap \mathrm{Im}\, u = \{0_E\} \Rightarrow u(x) = 0_E \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}\, u$.

2. • Mq $\mathrm{Im}(v\circ u) = \mathrm{Im}\, v \Rightarrow \mathrm{Im}\, u + \mathrm{Ker}\, v = E$.

Soit $x \in E$. $v(x) \in \mathrm{Im}\, v$ et $\mathrm{Im}\, v = \mathrm{Im}(v\circ u)$ donc $v(x) \in \mathrm{Im}(v\circ u)$

$\exists t \in E$ tq $v(x) = v\circ u(t) = v(u(t))$.

On a : $x = \underbrace{u(t)} + \underbrace{x - u(t)}$.

$u(t) \in \mathrm{Im}\, u$ et $x - u(t) \in \mathrm{Ker}\, v$ car $v(x-u(t)) \overset{v \text{ lin}}{=} v(x) - v\circ u(t)$
$= v(x) - v(x) = 0_E$.

Donc $E \subset \mathrm{Im}\, u + \mathrm{Ker}\, v$

Or $\mathrm{Im}\, u + \mathrm{Ker}\, v \subset E$ car la somme de 2 sev de E est un sev de E.

Donc $E = \mathrm{Im}\, u + \mathrm{Ker}\, v$

• Mq $\mathrm{Im}\, u + \mathrm{Ker}\, v = E \Rightarrow \mathrm{Im}(v\circ u) = \mathrm{Im}\, v$. On sait déjà que $\mathrm{Im}(v\circ u) \subset \mathrm{Im}\, v$ (ex 5). Mq $\mathrm{Im}\, v \subset \mathrm{Im}(v\circ u)$.

Soit $y \in \mathrm{Im}\, v$. $\exists x \in E$ tq $y = v(x)$. or $E = \mathrm{Im}\, u + \mathrm{Ker}\, v$ donc $\exists x_1 \in \mathrm{Im}\, u$ $\exists x_2 \in \mathrm{Ker}\, v$ tq $x = x_1 + x_2 \Rightarrow v(x) = v(x_1) + v(x_2)$ car v lin

$x_1 \in \mathrm{Im}\, u \Rightarrow \exists t \in E$ tq $x_1 = u(t)$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}\, v \Rightarrow v(x_2) = 0_E \Rightarrow v(x) = v(u(t)) \Rightarrow y \in \mathrm{Im}(v\circ u)$

TD23 cor

Ex 12 Soient E, F et G 3 $\mathbb{K}$ev.

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.

- Mq $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E,G)} \Rightarrow \mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker}\, g$

Soit $y \in \mathrm{Im} f$

$\exists x \in E$ tq $y = f(x)$

$\Rightarrow g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = 0_{\mathcal{L}(E,G)}(x) = 0_G$

$\Rightarrow y \in \mathrm{Ker}\, g$

- Mq $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker}\, g \Rightarrow g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E,G)}$

Soit $x \in E$

$g \circ f(x) = g(f(x))$

or $f(x) \in \mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker}\, g$

donc $f(x) \in \mathrm{Ker}\, g$ donc $g(f(x)) = 0_G$

Donc $g \circ f(x) = 0_G$.

$\forall x \in E$, $g \circ f(x) = 0_G \Rightarrow g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E,G)}$.