TD23 cor ⚠ même énoncé ! $u : E \to F$ $v : F \to E$
ex 11

① $u \circ v = id_F \Rightarrow v$ est injective et u surjective d'après ex 3 TD23
mais u et v ne sont pas nécessairement bijectifs.
Prendre par ex : $F = E = \mathbb{R}[X]$
$u : P \mapsto P'$ et $v : P \mapsto$ primitive de P s'annulant en 0
u et v sont des appl linéaires (le montrer) et $u \circ v = id_E$
(le montrer) mais u n'est pas injective (si P est cst non nul
alors $u(P) = 0_E$
donc $\operatorname{Ker} u \neq \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$) et v n'est pas surjective ($\operatorname{Im} v \neq \mathbb{R}[X]$
car les pol constants non nuls n'ont pas d'antécédents dans
$\mathbb{R}[X]$ par v car ils ne s'annulent pas en 0).

② $v \circ u \in \mathcal{L}(F)$ d'après le cours puisque $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$
(composée d'appl lin).
et $(v \circ u) \circ (v \circ u) = v \circ (u \circ v) \circ u) = v \circ id_F \circ u = v \circ u$
Concl : $v \circ u$ est un projecteur

③ • Soit $x \in \operatorname{Ker}(v \circ u)$ alors $(v \circ u)(x) = 0_E$ donc $u \circ (v \circ u)(x) = u(0_E) = 0_F$
donc $((u \circ v) \circ u)(x) = 0_F$ donc $id_F \circ u(x) = 0_F$ donc $u(x) = 0_F$
donc $x \in \operatorname{Ker} u$ Ainsi $\operatorname{Ker}(v \circ u) \subset \operatorname{Ker} u$.
Mq $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker}(v \circ u)$.
Soit $x \in \operatorname{Ker} u$ alors $u(x) = 0_F$ donc $v(u(x)) = v(0_F) = 0_E$
donc $(v \circ u)(x) = 0_E$ et $x \in \operatorname{Ker}(v \circ u)$ Concl : $\operatorname{Ker}(v \circ u) = \operatorname{Ker} u$

• Soit $y \in \operatorname{Im}(v \circ u)$ Alors il existe $x \in E$ tq $y = (v \circ u)(x)$
$y = v(u(x))$
donc il existe $z = u(x) \in F$ tq $y = v(z)$
donc $y \in \operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$
Mq $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Im}(v \circ u)$
Soit $y \in \operatorname{Im} v$. Il existe $x \in F$ tq $y = v(x)$ $(*)$
donc $u(y) = (u \circ v)(x) = id_F(x) = x$. $\Rightarrow x = u(y)$
donc $(*)$ devient $y = v(u(y)) = v \circ u(y)$
Donc $y \in \operatorname{Im}(v \circ u)$ Concl : $\operatorname{Im}(v \circ u) = \operatorname{Im} v$

TD 23

Ex 9 D'après le cours Kerf et Imf sont des sev de E puisque $f \in \mathcal{L}(E)$

- Mq $\ker f \cap \mathrm{Im} f = \{0_E\}$ par double inclusion

* Soit $x \in \ker f \cap \mathrm{Im} f$

$x \in \ker f \Rightarrow f(x) = 0_E$

$x \in \mathrm{Im} f \Rightarrow \exists t \in E$ tq $x = f(t)$.

Comme $f^3 - 3af^2 + a^2 f = 0_{\mathcal{L}(E)}$, on a :

$f \circ f \circ f(t) - 3a\, f \circ f(t) + a^2 f(t) = 0_{\mathcal{L}(E)}(t) = 0_E$

donc $f^2(x) - 3 f(x) + a^2 x = 0_E$ $(\star)$

or $f(x) = 0_E$ donc $f(f(x)) = f(0_E) = 0_E$ et $(\star)$ devient $a^2 x = 0_E$

avec $a \neq 0_{\mathbb{C}}$ (énoncé) donc $x = 0_E$ donc $\ker f \cap \mathrm{Im} f \subset \{0_E\}$

* $0_E \in \ker f \cap \mathrm{Im} f$ car l'intersect° de 2 sev de E est 1 sev de E
donc $\{0_E\} \subset \ker f \cap \mathrm{Im} f$

- Mq $\ker f + \mathrm{Im} f = E$ par double inclusion

* Soit $x \in E$

$$x = \underbrace{\frac{1}{a^2}\left[f^2(x) - 3a f(x) + a^2 x \right]}_{u} + \underbrace{\frac{1}{a^2}\left[3a f(x) - f^2(x) \right]}_{v}$$

mq $u \in \ker f$ et $v \in \mathrm{Im} f$

$$f(u) = \frac{1}{a^2}\left(f^3(x) - 3a f^2(x) + a^2 f(x) \right) = \frac{1}{a^2}\left(-a^2 f(x) + a^2 f(x) \right) = \frac{1}{a^2} \times 0_E = 0_E$$

donc $u \in \ker f$

$$v = f\Big(\underbrace{\frac{3a}{a^2} x - f\left(\frac{1}{a^2} x\right)}_{\in E \text{ car } f \in \mathcal{L}(E)} \Big) \text{ donc } v \in \mathrm{Im} f$$

donc $x \in \ker f + \mathrm{Im} f$ et $E \subset \ker f + \mathrm{Im} f$

* $\ker f + \mathrm{Im} f \subset E$ car la somme de 2 sev de E est un sev de E

Concl : Kerf et Imf sont supplémentaires dans E