TD 24

Ex 14

① $(\overbrace{u_0}^{\in E}, \overbrace{\phi(u_0)}^{\in E}, \overbrace{\phi^2(u_0)}^{\in E})$ car $\phi \in \mathcal{L}(E)$ est une famille de 3 élts de E et $\dim E = \dim \mathbb{K}^3 = 3$

Mq $(u_0, \phi(u_0), \phi^2(u_0))$ est libre

Soit $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{K}^3$ tq $\alpha u_0 + \beta\phi(u_0) + \gamma\phi^2(u_0) = 0_E$ $(*)$

on applique ϕ : $\phi(\alpha u_0 + \beta\phi(u_0) + \gamma\phi^2(u_0)) = \phi(0_E)$

donc $\alpha\phi(u_0) + \beta\phi^2(u_0) + \gamma\phi^3(u_0) = 0_E$ or $\phi^3(u_0) = \tilde{0}(u_0) = 0_E$

donc $\alpha\phi(u_0) + \beta\phi^2(u_0) = 0_E$ (Δ)

On applique de nouveau ϕ : $\phi(\alpha\phi(u_0) + \beta\phi^2(u_0)) = \phi(0_E)$

càd $\alpha\phi^2(u_0) + \beta\phi^3(u_0) = 0_E$ or $\phi^3(u_0) = 0_E$

donc $\alpha\phi^2(u_0) = 0_E$ or $\phi^2(u_0) \neq 0_E$ donc $\alpha = 0$.

Si on revient à (Δ) on obtient $\beta\phi^2(u_0) = 0_E$ et $\phi^2(u_0) \neq 0_E$ donc $\beta = 0$

Si on revient à $(*)$ on obtient $\gamma\phi^2(u_0) = 0_E$ et $\phi^2(u_0) \neq 0_E$ donc $\gamma = 0$

Ainsi la famille est libre et a 3 élts $\Rightarrow$ c'est une base de E

② Soit f un endomorphisme de E qui commute avec ϕ

Comme $f(u_0)$ est un vecteur de E, il existe $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{K}^3$ tq

(Δ) $f(u_0) = \alpha u_0 + \beta\varphi(u_0) + \gamma\varphi^2(u_0)$ d'après la question précédente.

Soit $g = \alpha\, id_E + \beta\varphi + \gamma\varphi^2$. Montrons que pour tout $x \in E$, $g(x) = f(x)$.

Comme $x \in E$, $\exists (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{K}^3$ tq $x = x_1u_0 + x_2\varphi(u_0) + x_3\varphi^2(u_0)$.

$g(x) = \alpha x + \beta\varphi(x) + \gamma\varphi^2(x)$ $\searrow$ φ est linéaire

$= \alpha(x_1u_0 + x_2\varphi(u_0) + x_3\varphi^2(u_0)) + \beta(x_1\varphi(u_0) + x_2\varphi^2(u_0)) + \gamma(x_1\varphi^2(u_0))$

$= \alpha x_1 u_0 + (\alpha x_2 + \beta x_1)\varphi(u_0) + (\alpha x_3 + \beta x_2 + \gamma x_1)\varphi^2(u_0)$

D'autre part

$f(x) = f(x_1u_0 + x_2\varphi(u_0) + x_3\varphi^2(u_0))$ $\searrow$ f est linéaire

$= x_1 f(u_0) + x_2 f\circ\varphi(u_0) + x_3 f\circ\varphi^2(u_0)$

$= x_1 f(u_0) + x_2\varphi(f(u_0)) + x_3\varphi^2(f(u_0))$

(Δ) $= x_1(\alpha u_0 + \beta\varphi(u_0) + \gamma\varphi^2(u_0)) + x_2\varphi(\alpha u_0 + \beta\varphi(u_0) + \gamma\varphi^2(u_0)) + x_3\varphi^2(\alpha u_0 + \beta\varphi(u_0) + \gamma\varphi^2(u_0))$

$= \alpha x_1 u_0 + (\beta x_1 + \alpha x_2)\varphi(u_0) + (x_1\gamma + \beta x_2 + \alpha x_3)\varphi^2(u_0)$

Ainsi $\forall x \in E$ $f(x) = g(x)$ donc $f = g$ sur E

les endomorphismes qui commutent avec φ sont bien de la forme

$g = \alpha\, id_E + \beta\varphi + \gamma\varphi^2$ (et la réciproque est vraie aussi)