

TD24

Ex 6

① Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tq $\alpha + \beta \cos x + \gamma \sin x = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$

but: on a $\alpha = \beta = \gamma = 0$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \alpha + \beta \cos x + \gamma \sin x = 0$$

Pour $x = 0$ on obtient $\alpha + \beta = 0$

Pour $x = \frac{\pi}{2}$ on obtient $\alpha + \gamma = 0$

Pour $x = \pi$ on obtient $\alpha - \beta = 0$

$$\text{Ainsi } \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Donc $(1, \cos, \sin)$ est une famille libre sur $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

② Raisonnons par l'absurde
Supposons que $x \mapsto x$ appartient à $\text{Vect}(1, \cos, \sin)$

Alors $\exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \forall x \in \mathbb{R} \quad x = \alpha + \beta \cos x + \gamma \sin x$

$$\begin{aligned} \text{Alors } \forall x \in \mathbb{R} \quad |x| &= |\alpha + \beta \cos x + \gamma \sin x| \\ &\leq |\alpha| + |\beta| |\cos x| + |\gamma| |\sin x| \\ &\leq |\alpha| + |\beta| + |\gamma| \end{aligned}$$

absurdité

Donc $x \mapsto x$ n'appartient pas à $\text{Vect}(1, \cos, \sin)$