Chapitre 25 : Séries

Introduction

Dès l'Antiquité, l'étude de sommes comportant une infinité dénombrable de termes pose question (paradoxe de Zénon). Dans ses travaux sur les calculs d'aire et de volume, Archimède utilise des sommations dont les termes suivent une progression géométrique.

Il faut attendre ensuite le XIVème siècle, en Angleterre et en Inde, pour que l'étude des séries se développe, avec le calcul de la somme de la série de terme général $\dfrac{n}{2^n}$ (Suiseth), l'obtention de la divergence de la série harmonique (Oresme) et le développement en série de fonctions trigonométriques, dans le but d'obtenir des approximations, en particulier du nombre π (Madhava).

Avec le développement du calcul différentiel et intégral au XVIIème siècle, l'étude des séries se poursuit avec l'obtention de critères de convergences, en particulier par Leibniz et d'Alembert.

Au XVIIIème siècle, les séries sont couramment utilisées dans les calculs ; Taylor développe la construction des séries qui portent son nom et Euler établit de nombreuses relations en rapport avec les séries. Enfin, en 1821, dans son ouvrage intitulé *Analyse algébrique*, Cauchy développe un formalisme précis sur la notion de série et permet la diffusion large et rapide d'une théorie rigoureuse. Riemann poursuit ensuite les travaux de Cauchy sur les intégrales dans la deuxième moitié du XIXème siècle.

Dans tout le chapitre on suppose que $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $n_0 \in \mathbb{N}$.

1 Généralités

Définition 1 (Série réelle).

A toute suite réelle $(u_n)_{n \geq n_0}$, on associe la suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ définie pour tout $n \geq n_0$ par

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

*On dit que la **série** de terme général u_n, notée $\sum_{n \geq n_0} u_n$ (ou plus succinctement $\sum u_n$) **converge** ou **diverge** selon que la suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ converge ou diverge. La suite (S_n) est appelée suite des **sommes partielles** de la série $\sum u_n$. En cas de convergence, sa limite S est appelée **somme de la série** et notée*

$$S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n.$$

Remarque 1.

1. *Donner la **nature** d'une série, c'est dire si elle est convergente ou divergente.*
2. *La convergence de la série est liée à la convergence de la suite (S_n) et pas à celle de (u_n). Examiner le cas de la série de terme général $u_n = -2$ pour s'en convaincre...*
3. *Le nombre réel $S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ n'existe pas nécessairement. Avant de l'écrire, s'assurer de son existence, c'est-à-dire vérifier que la série de terme général u_n converge.*

► Exemple :

1. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 0} n^2$.
2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 0} (-3)^n$.
3. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$.

Définition 2 (Reste d'une série convergente).

Si la série converge, le nombre $r_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ est appelé ***reste d'ordre*** n ***de la série*** $\sum u_n$.

Remarque 2. $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$.

▶ Exemple : Déterminer le reste d'ordre $p \geq 2$ de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$.

Propriété 1.

1. *On ne change pas la nature d'une série en retirant les termes nuls, et en cas de convergence les deux séries ont la même somme.*
2. *Les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} u_n$ sont de même nature.*
3. *On ne change pas la nature d'une série en modifiant un ensemble fini de ses termes.*

▶ Exemple : $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} = \sum_{p\geq 1} \frac{(-1)^p}{2p}$ sont de même nature.

Propriété 2 (Combinaison linéaire de séries convergentes).

Etant donné deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ et un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit ***la série somme*** *comme la série de terme général $u_n + v_n$. Elle est notée $\sum (u_n + v_n)$. On définit aussi* ***la série produit par*** α ***de la série*** $\sum u_n$ *comme la série de terme général αu_n, que l'on note $\sum \alpha u_n$.*

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes et si $\alpha \in \mathbb{K}$, alors $\sum (\alpha u_n + v_n)$ est convergente et $\sum_{n=n_0}^{\infty} (\alpha u_n + v_n) = \alpha \sum_{n=n_0}^{\infty} (u_n) + \sum_{n=n_0}^{\infty} (v_n)$.

Remarque 3. *La série nulle est celle dont tous les termes sont nuls.*
La somme d'une série convergente et d'une série divergente est divergente. En revanche, on ne peut rien dire de la somme de deux séries divergentes. Prendre par exemple le cas de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$.

Propriété 3.

Si une série $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Remarque 4.

1. *Attention la condition $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ n'est absolument pas suffisante : considérer par exemple la série $\sum_{n\geq 0} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ (série télescopique).*
2. *On se sert de la contraposée de cette propriété pour montrer qu'une série diverge. Prendre par ex la série $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{2n^2+n}$.*

Définition 3 (Divergence grossière).

Lorsque le terme général u_n ne tend pas vers 0, on dit que $\sum u_n$ diverge grossièrement.

2 Séries de référence

Propriété 4 (Série géométrique).

*On appelle **série géométrique** une série de la forme $\sum_{n\geq 0} a^n$ avec $a \in \mathbb{K}$.*

Si $a \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.
La série géométrique converge si et seulement si $|a| < 1$.
La somme est alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$

► Exemple : que dire de la série $\sum_{n\geq n_0} a^n$? Donner le reste d'ordre $p \geq 0$ de $\sum_{n\geq 0} a^n$ lorque $a \in]0,1[$

Propriété 5 (Série télescopique/lien suite-série).

La suite (u_n) et la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature.

En cas de convergence, $\sum_{n=0}^{\infty} (u_{n+1} - u_n) = lim_{n\to\infty} u_n - u_0$.

On peut ainsi ramener l'étude d'une série à celle d'une suite, et inversement, pour montrer qu'une suite converge, étudier la série télescopique associée (voir exercice sur la constante d'Euler).
A retenir dans le cas où $\sum u_n$ est une série télescopique : $u_n = S_n - S_{n-1}$.

► Exemple : Etude de la série $\left(\sum \frac{1}{n(n+3)}\right)_{n>0}$.

Propriété 6 (Série harmonique).

*On appelle **série harmonique** la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.*

La série harmonique diverge vers $+\infty$.

Cette propriété est un cas particulier du théorème suivant :

Théorème 1 (Séries de Riemann).

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

La démonstration fait appel à une méthode de comparaison avec l'intégrale d'une fonction continue et monotone (méthode des rectangles). Méthode à connaître.

► Exemple : $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

3 Séries à termes positifs

Dans ce paragraphe, on considère des séries réelles $\sum u_n$ avec $u_n \geq 0$.

Propriété 7.

Une série à terme positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. Si elle diverge, la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$.

Remarque 5. *Si $\sum u_n$ est une série à termes positifs divergente, on écrit $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.*
Cette notation est généralement réservée aux séries divergentes à termes réels positifs (ou positifs à partir d'un certain rang).

▶ Exemple : Montrer que $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{1+2^n}$ converge.

3.1 Comparaison série-série

Théorème 2 (Règle de comparaison entre séries à termes positifs).

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $\forall n \geq n_0,\ 0 \leq u_n \leq v_n$.

1. *Si la série $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} v_n$.*
2. *Si la série $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.*

Remarque 6 (Règle de comparaison à partir d'un certain rang)**.** *Si la majoration $u_n \leq v_n$ n'est vérifiée qu'à partir d'un certain rang, la règle de comparaison reste valable mais pas forcément l'inégalité $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n$. Prendre par exemple $u_n = 3^{-n}$ si $n \geq 0$ et d'autre part $v_0 = 0$ et $v_n = 2^{-n}$ si $n \geq 1$.*

▶ Exemple : Montrer que $\sum_{n\geq 2} \frac{\ln n}{n}$ diverge par comparaison avec la série harmonique $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n}$.

On peut chercher la limite de $n^\alpha u_n$, avec α bien choisi, et, s'appuyer sur la valeur de cette limite pour utiliser la règle de comparaison à partir d'un certain rang avec une série de Riemann, comme dans l'exercice ci-dessous. Les croissances comparées sont très utiles dans ce contexte, en particulier pour l'étude de séries contenant une exponentielle d'argument négatif.
On rappelle ici les croissances comparées, qu'il faut bien connaître :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \beta > 0,\ \lim_{n\to+\infty} n^\alpha e^{-n^\beta} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} = 0$$

Exercice 1. *Réf. 63*

1. *Déterminer $\lim_{n\to+\infty} n^2 e^{-n^2}$. En déduire la nature de la série $\sum e^{-n^2}$.*
2. *Déterminer $\lim_{n\to+\infty} n \times \frac{1}{(\ln(n))^2}$. En déduire la nature de la série $\sum \frac{1}{(\ln(n))^2}$.*
3. *Quelle est la nature de la série $\sum n e^{-n^4}$?*

Théorème 3 (Règle d'équivalence).

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que lorsque $n \to +\infty$, $u_n \sim v_n$.
Les deux séries ont même nature.

▶ Exemple : Utilisation d'équivalents.
Montrer que $\sum \sin \frac{1}{n}$ diverge et que $\sum \tan \frac{1}{n^2}$ converge.

3.2 Comparaison série-intégrale

Propriété 8 (Encadrement des sommes partielles).

Soit f une fonction continue par morceaux, positive et décroissante sur $[0,+\infty[$. On a l'encadrement suivant :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt \leq f(k-1),$$

duquel on déduit, par sommation et à l'aide de la relation de Chasles sur les intégrales :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_{1}^{n+1} f(t)\,dt \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_{0}^{n} f(t)\,dt.$$

Pour tout $p \geq 1$, $q \geq 1$ tels que $q \geq p$, on a :

$$\int_{p}^{q+1} f(t)\,dt \leq \sum_{k=p}^{q} f(k) \leq \int_{p-1}^{q} f(t)\,dt.$$

Exercice 2. *Réf. 61*
Montrer que $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \sim \ln(n)$ *et que si* $\alpha \in]0,1[$, $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

Exercice 3. *Déterminer un équivalent de* $\ln(n!)$.

4 Séries absolument convergentes

Définition 4 (Absolue convergence).

Une série $\sum u_n$ *est dite absolument convergente si la série* $\sum |u_n|$ *est convergente.*

► Exemple : si $|a| < 1$, $\sum a^n$ est absolument convergente.

Théorème 4.

Toute série absolument convergente est convergente.

Remarque 7. *La réciproque est fausse. Prendre par exemple la série* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.
La convergence absolue est donc une condition suffisante pour obtenir la convergence d'une série.

► Exemple : Etudier la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\sin n}{e^n + n}$, de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-3)^n}{1+5^n}$.

Propriété 9 (Inégalité triangulaire).

Soit $\sum u_n$ *une série absolument convergente à termes réels ou complexes. On a* $\displaystyle\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

La propriété suivante est utile en probabilités.

Propriété 10.

La valeur de la somme d'une série absolument convergente ne dépend pas de l'ordre d'énumération de ses termes.

Théorème 5 (Règle de domination).

Soient (u_n) une suite complexe et (v_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$ telles que $u_n = O(v_n)$. Alors si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

▶ Exemple : Préciser la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$.

5 Séries alternées

Définition 5 (Série alternée).

On dit que la série réelle $\sum u_n$ est alternée si la suite $((-1)^n u_n)_{n\geq n_0}$ est de signe constant, c'est-à-dire s'il existe une suite (v_n) positive telle que

$$\forall n \geq n_0,\ u_n = (-1)^n v_n \text{ ou } \forall n \geq n_0,\ u_n = (-1)^{n+1} v_n$$

Par exemple la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est une série alternée. $\sum u_n$ en est une autre, où $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = \dfrac{1}{2n}$ et $u_{2n+1} = \dfrac{-1}{n+1}$.

Remarque : une série $\sum u_n$ est alternée ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n u_{n+1} \leq 0$.

Théorème 6 (Critère des séries alternées, CSA).

Soit $\sum u_n$ une série alternée.
Si $(|u_n|)$ décroît et si (u_n) converge vers 0 alors $\sum u_n$ est convergente.
Dans ce cas, la somme de la série est comprise entre deux termes consécutifs de la suite (S_n) et le reste $R_n = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p$ est du signe de u_{n+1} et vérifie $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

La somme de la série est du signe de u_0.
Par ce critère, la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge alors qu'elle ne converge pas absolument.

Exercice 4. Réf. 65
Soit (v_n) une suite décroissante de limite nulle. On étudie la série $\sum (-1)^n v_n$. On note pour $n \in \mathbb{N}$ S_n la somme partielle d'indice n de cette série.

1. *Démontrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.*
2. *En déduire que la série $\sum (-1)^n v_n$ converge.*
3. *Démontrer que pour tout entier naturel, $|R_n| \leq v_{n+1}$.*
4. *Info Ecrire une fonction `somme` en **Python** qui prend en argument un entier non nul N et sort S_N.*
5. *Info Ecrire une fonction `ValAp` en **Python** qui prend en argument un réel ε et sort la première valeur de N et la valeur de S_N correspondante telles que $|S_N - S_{N+1}| < \varepsilon$. Pouvez-vous justifier l'emploi de cette condition d'arrêt pour obtenir une valeur approchée de la somme de la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n}$?*

6 Exponentielle complexe

Propriété 11.

Si $z \in \mathbb{C}^*$, alors $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

7 Méthodes pour étudier la nature d'une série $\sum u_n$

1. montrer que (u_n) ne converge pas vers 0 et conclure à la divergence de $\sum u_n$ (DVG),
2. reconnaître une série usuelle (télescopique ou géométrique ou de Riemann),
3. si u_n n'est pas de signe constant, voir si $\sum u_n$ est absolument convergente (elle sera donc convergente puisque l'absolue convergence implique la convergence),
4. si $\sum u_n$ est alternée, appliquer le critère spécial des séries alternées,
5. si (u_n) est à termes positifs,
   (a) majorer u_n par le terme général d'une série convergente (RCSTP, comparaison série-série),
   (b) minorer u_n par le terme général d'une série divergente (RCSTP, comparaison série-série),
   (c) trouver un équivalent simple de u_n puis appliquer le théorème d'équivalence (parfois un développement asymptotique peut aider à obtenir un équivalent simple de u_n),
   (d) lorsque u_n n'admet pas d'équivalent simple, appliquer la règle du $n^\alpha u_n$, c'est-à-dire étudier la limite de $n^\alpha u_n$, avec α bien choisi. Si cette limite est nulle on applique la RCSTP et le cours sur les séries de Riemann pour conclure,
   (e) utiliser une comparaison série/intégrale si $u_n = f(n)$ où f est continue par morceaux, décroissante et positive sur un intervalle $[a, +\infty[$. En utilisant l'encadrement obtenu par cette méthode, on peut également trouver des équivalents de sommes partielles ou de restes.