TD 25 : séries

Exercice 1. *Réf. 67*
Déterminer la nature des séries de terme général ci-dessous. Pour les deux derniers cas, on effectuera un développement asymptotique.

1. $v_n = \dfrac{4^n - n}{5^n + 2n^4}$,
2. $x_n = \dfrac{\ln n}{3n^4 - 2}$,
3. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$,
4. $b_n = \dfrac{(-1)^n n}{n^3 + n + 1}$,
5. $c_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}} + \cos n}$
6. $d_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

Exercice 2. *Réf. 68*
Montrer que la série $\sum \ln(1 - n^{-2})$ *converge et calculer sa somme.*

Exercice 3. *Réf. 69*

1. *Montrer que les séries suivantes sont convergentes :*

$$\sum \sin(\frac{1}{n^3}) \qquad \sum \ln(1 + 2^{-n}) \qquad \sum \big(\cos(2^{-n}) - 1\big)$$

2. *Montrer que les séries suivantes sont divergentes :*

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \qquad \sum \sqrt[n]{n} - 1$$

Exercice 4. *Réf. 71*
Pour tout entier naturel non nul n*, on pose* $u_n = \arctan(\dfrac{1}{n^2 + n + 1})$.

1. *Justifier que* $\sum u_n$ *est convergente.*
2. *Montrer que, pour tout entier naturel non nul* n*, on a* $\arctan(\dfrac{1}{n}) - \arctan(\dfrac{1}{n+1}) = \arctan(\dfrac{1}{n^2 + n + 1})$
3. *En déduire d'une seconde manière la nature de* $\sum u_n$ *et calculer sa somme.*

Exercice 5. *Réf. 73*
Pour $n \geq 2$*, on pose* $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \ln k$ *et* $u_n = \dfrac{1}{S_n}$.

1. *Déterminer un équivalent de* (S_n).
2. *Etudier la nature de la série* $\sum u_n$.

Exercice 6. *Réf. 75*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. *Justifier l'existence de R_n et montrer que* $R_n + R_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$.
2. *Donner un équivalent de R_n et déterminer la nature de* $\sum R_n$.

Exercice 7. *Réf. 76*

Pour quelles valeurs de α la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ *est-elle convergente ? absolument convergente ?*

Exercice 8. *Réf. 77*

Soit $a > 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^a}$.

1. *Justifier l'existence de R_n et déterminer* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n$.
2. *A l'aide d'une comparaison avec une intégrale, donner un équivalent de R_n et déterminer la nature de* $\sum R_n$ *suivant les valeurs de a.*

Exercice 9. *Réf. 78*

Démontrer que $\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = \dfrac{(-1)^n}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ *et en déduire la nature de la série* $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$.

Exercice 10. *Réf. 79*

Etudier suivant les valeurs du réel strictement positif α, la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(3n)!}{\alpha^{3n}(n!)^3}$.

Exercice 11. *Réf. 83*

Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les exemples suivants :

$\dfrac{1}{n^2 \ln n}$, $\dfrac{ln(n)}{n}$, $\dfrac{ln(n)}{n^2}$, $\dfrac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$, $\dfrac{1}{n\ln(n)}$, $\dfrac{1}{n(\ln(n))^2}$.

Exercice 12. *Réf. 88*

Soit $a \in]0,1[$, on définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2$$

1. *Montrer que la suite (u_n) est monotone, convergente et déterminer sa limite.*
2. *Montrer que la série $\sum u_n^2$ est convergente et déterminer sa somme en fonction de a.*
3. *Montrer que la série* $\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ *est divergente.*
4. *Etudier la nature de la série $\sum u_n$.*