

TD 25 : séries

Exercice 1. Réf. 67

Déterminer la nature des séries de terme général ci-dessous. Pour les deux derniers cas, on effectuera un développement asymptotique.

1. $v_n = \frac{4^n - n}{5^n + 2n^4},$
2. $x_n = \frac{\ln n}{3n^4 - 2},$
3. $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},$
4. $b_n = \frac{(-1)^n n}{n^3 + n + 1},$
5. $c_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}} + \cos n}$
6. $d_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$

Exercice 2. Réf. 68

Montrer que la série $\sum \ln(1 - n^{-2})$ converge et calculer sa somme.

Exercice 3. Réf. 69

1. Montrer que les séries suivantes sont convergentes :

$$\sum \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad \sum \ln(1 + 2^{-n}) \quad \sum (\cos(2^{-n}) - 1)$$

2. Montrer que les séries suivantes sont divergentes :

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \quad \sum \sqrt[n]{n} - 1$$

Exercice 4. Réf. 71

Pour tout entier naturel non nul n , on pose $u_n = \arctan\left(\frac{1}{n^2 + n + 1}\right).$

1. Justifier que $\sum u_n$ est convergente.
2. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , on a $\arctan\left(\frac{1}{n}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n+1}\right) = \arctan\left(\frac{1}{n^2 + n + 1}\right)$
3. En déduire d'une seconde manière la nature de $\sum u_n$ et calculer sa somme.

Exercice 5. Réf. 73

Pour $n \geq 2$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n k \ln k$ et $u_n = \frac{1}{S_n}.$

1. Déterminer un équivalent de $(S_n).$
2. Etudier la nature de la série $\sum u_n.$

Exercice 6. Réf. 75

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Justifier l'existence de R_n et montrer que $R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$.

2. Donner un équivalent de R_n et déterminer la nature de $\sum R_n$.

Exercice 7. Réf. 76

Pour quelles valeurs de α la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est-elle convergente ? absolument convergente ?

Exercice 8. Réf. 77

Soit $a > 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^a}$.

1. Justifier l'existence de R_n et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n$.

2. A l'aide d'une comparaison avec une intégrale, donner un équivalent de R_n et déterminer la nature de $\sum R_n$ suivant les valeurs de a .

Exercice 9. Réf. 78

Démontrer que $\frac{(-1)^n}{n + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et en déduire la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$.

Exercice 10. Réf. 79

Etudier suivant les valeurs du réel strictement positif α , la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(3n)!}{\alpha^{3n}(n!)^3}$.

Exercice 11. Réf. 83

Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les exemples suivants :

$$\frac{1}{n^2 \ln n}, \quad \frac{\ln(n)}{n}, \quad \frac{\ln(n)}{n^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{n} \ln(n)}, \quad \frac{1}{n \ln(n)}, \quad \frac{1}{n(\ln(n))^2}.$$

Exercice 12. Réf. 88

Soit $a \in]0, 1[$, on définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$$

1. Montrer que la suite (u_n) est monotone, convergente et déterminer sa limite.
2. Montrer que la série $\sum u_n^2$ est convergente et déterminer sa somme en fonction de a .
3. Montrer que la série $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.
4. Etudier la nature de la série $\sum u_n$.