

Ex 3

①. $\sin \frac{1}{n^3} \sim \frac{1}{n^3}$ et $\sum \frac{1}{n^3}$ CV (série de Riemann avec $\alpha = 3 > 1$) donc par le th d'éq positive (presque $\forall n \geq 1$, $\frac{1}{n^3} \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin \frac{1}{n^3} \geq 0$) on peut affirmer que $\sum \sin \frac{1}{n^3}$ CV

• $\ln(1 + \frac{1}{2^n}) \sim \frac{1}{2^n}$ et $\sum \frac{1}{2^n}$ CV (série géométrique $\sum q^n$ avec $q = \frac{1}{2}$ et $|q| < 1$)
car $\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{2^n} = (\frac{1}{2})^n$

De plus $\forall n \in \mathbb{N}$ $1 + \frac{1}{2^n} \geq 1$ donc $\ln(1 + \frac{1}{2^n}) \geq 0$ donc par le th d'éq positive $\sum \ln(1 + \frac{1}{2^n})$ CV

• $\cos(\frac{1}{2^n}) - 1 \sim -(\frac{1}{2^n})^2 \times \frac{1}{2}$ donc $1 - \cos(\frac{1}{2^n}) \sim \frac{1}{2^{2n+1}}$ or $\sum \frac{1}{2^{2n+1}}$ CV
(série géométrique $\sum q^n$ avec $q = \frac{1}{4}$ et $|q| < 1$ car $\forall n \in \mathbb{N}$ $2^{2n} = (2^2)^n = 4^n$)
donc $\sum \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{2n}}$ CV et par th d'éq positive (presque $\forall n \in \mathbb{N}$ $1 - \cos \frac{1}{2^n} \geq 0$)
 $\sum (1 - \cos(\frac{1}{2^n}))$ CV donc $\sum (\cos(\frac{1}{2^n}) - 1)$ CV aussi (ce de séries CV)

②. $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \sim \frac{1}{n}$ car $\frac{n}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{n}{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n})}} \stackrel{n \geq 0}{=} \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

et $\sum \frac{1}{n}$ DV (série harmonique) donc par le th d'éq positive, $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ DV

• $\sqrt[n]{n} - 1 = n^{\frac{1}{n}} - 1 = e^{\frac{1}{n} \ln n} - 1 \sim \frac{\ln n}{n}$ car $\frac{\ln n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $e^x - 1 \sim x$

or on a montré au cours que $\sum \frac{\ln n}{n}$ DV (comparaison avec $\sum \frac{1}{n}$).
donc par le th d'éq positive $\sum \sqrt[n]{n} - 1$ DV

① Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\arctan x \leq x$ (*)

Soit $f: x \mapsto x - \arctan x$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme somme de fct's dérivables sur $\mathbb{R}^+$

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0$ Donc f est croissante sur $\mathbb{R}^+$
et $f(0) = 0$ Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) \geq 0$ et $x \geq \arctan x$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\frac{1}{n^2+n+1} \geq 0$ et que $\arctan$ est croissante sur $\mathbb{R}$,
 $0 \leq \arctan \frac{1}{n^2+n+1}$. De plus, $\frac{1}{n^2+n+1} \leq \frac{1}{n^2}$

Ainsi $0 \leq \arctan \frac{1}{n^2+n+1} \leq \frac{1}{n^2+n+1} \leq \frac{1}{n^2}$
(*)

or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ CV (Série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$) donc par RCSTP,

$\sum_{n \geq 1} \arctan \frac{1}{n^2+n+1}$ CV donc $\sum_{n \geq 0} \arctan \frac{1}{n^2+n+1}$ CV.

② Soit $n \in \mathbb{N}^*$

D'une part, $\tan(\arctan(\frac{1}{n^2+n+1})) = \frac{1}{n^2+n+1}$

D'autre part, $\tan(\arctan \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n+1}) = \frac{\tan(\arctan \frac{1}{n}) - \tan(\arctan \frac{1}{n+1})}{1 + \tan(\arctan \frac{1}{n}) \tan(\arctan \frac{1}{n+1})}$
 $= \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n} \frac{1}{n+1}} = \frac{\frac{n+1-n}{n(n+1)}}{1 + \frac{1}{n(n+1)}} = \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{n(n+1)+1}{n(n+1)}} = \frac{1}{n^2+n+1}$

Donc $\tan(\arctan(\frac{1}{n^2+n+1})) = \tan(\arctan \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n+1})$

De plus $\arctan(\frac{1}{n^2+n+1}) \in]0, \frac{\pi}{4}[$ car $0 < \frac{1}{n^2+n+1} < 1$ et $\arctan$ est str^t
croissante sur $\mathbb{R}$

De même $\arctan \frac{1}{n} \in]0, \frac{\pi}{4}]$ et $\arctan \frac{1}{n+1} \in]0, \frac{\pi}{4}[$ donc $0 < \arctan \frac{1}{n} \leq \frac{\pi}{4}$
 $-\frac{\pi}{4} < -\arctan \frac{1}{n+1} < 0$

Donc $\arctan \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n+1} \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

Ainsi $\arctan(\frac{1}{n^2+n+1})$ et $\arctan \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n+1}$ sont tous deux des
éléments de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et ont même tangente $\Rightarrow$ comme $\tan$ est injective
sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, ces 2 mb sont égaux

③ $\sum_{n \geq 1} u_n$ est télescopique donc sa nature est la même que celle de (u_n) qui est CV
de limite nulle. Donc $\sum_{n \geq 1} u_n$ CV donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ CV et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \arctan 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \arctan 1 + \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \arctan \frac{1}{n} - \arctan \left(\frac{1}{n+1} \right) = \frac{\pi}{4} + \lim_{N \rightarrow +\infty} (\arctan 1 - \arctan \frac{1}{N+1})$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

① $f: t \mapsto t \ln t$ est continue positive et croissante sur $[2, +\infty[$

$$\text{donc } \forall n \geq 3 \quad \sum_{k=2}^{n-1} k \ln k \leq \int_2^n t \ln t \, dt \leq \sum_{k=3}^n k \ln k$$

$$\text{càd } \forall n \geq 3 \quad S_n - n \ln 2 \leq \int_2^n t \ln t \, dt \leq S_n - 3 \ln 3$$

$$\text{on obtient donc } \forall n \geq 3 \quad \int_2^n t \ln t \, dt + 3 \ln 3 \leq S_n \leq \int_2^n t \ln t \, dt + n \ln 2$$

Calculons $\int_2^n t \ln t \, dt$ par une IPP :

$$\text{Soit } t \in [2, +\infty[, \quad u(t) = \frac{t^2}{2} \quad u'(t) = t \quad u \text{ et } v \text{ sont } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [2, +\infty[\\ v(t) = \ln t \quad v'(t) = \frac{1}{t}$$

$$\begin{aligned} \int_2^n t \ln t \, dt &= \left[\frac{t^2}{2} \ln t \right]_2^n - \int_2^n \frac{t^2}{2} \frac{1}{t} \, dt = \frac{n^2}{2} \ln n - 2 \ln 2 - \int_2^n \frac{t}{2} \, dt \\ &= \frac{n^2}{2} \ln n - 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_2^n = \frac{n^2}{2} \ln n - 2 \ln 2 - \frac{n^2}{4} + 1 \end{aligned}$$

on a alors

$$\forall n \geq 3 \quad \frac{n^2}{2} \ln n - 2 \ln 2 - \frac{n^2}{4} + 1 + 3 \ln 3 \leq S_n \leq \frac{n^2}{2} \ln n - 2 \ln 2 - \frac{n^2}{4} + 1 + n \ln 2$$

On divise par $n^2 \ln n > 0$

$$\forall n \geq 3 \quad \frac{1}{2} - \frac{2 \ln 2}{n^2 \ln n} - \frac{1}{4 \ln n} + \frac{1 + 3 \ln 3}{n^2 \ln n} \leq \frac{S_n}{n^2 \ln n} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{4 \ln n} - \frac{2 \ln 2}{n^2 \ln n} + \frac{1}{n^2 \ln n} + \frac{1}{n}$$

Par le th de gendarmes, on en déduit que $\frac{S_n}{n^2 \ln n} \rightarrow \frac{1}{2}$

$$\text{Donc } S_n \sim \frac{n^2 \ln n}{2}$$

② $u_n \sim \frac{2}{n^2 \ln n}$ donc $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$$\text{En effet, } \frac{u_n}{\frac{1}{n^2}} = n^2 u_n \sim \frac{2}{\ln n} \quad \text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\ln n} = 0$$

$$\text{donc } u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ donc } u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

or $\sum \frac{1}{n^2}$ CV (série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$)

Donc par le th de domination $\sum u_n$ CVA donc $\sum u_n$ CV.