

Ex 14 $\overbrace{E}^{E} \overbrace{E}^{E} \overbrace{E}^{E} \in E$ car $\phi \in \mathcal{L}(E)$ (1) $(u_0, \phi(u_0), \phi^2(u_0))$ est une famille de 3 éléments, et dim $E = \dim \mathbb{K}^3 = 3$ Mq $(u_0, \phi(u_0), \phi^2(u_0))$ est libreSoit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3$ tq $\alpha u_0 + \beta \phi(u_0) + \gamma \phi^2(u_0) = 0_E$ (*)on applique ϕ : $\phi(\alpha u_0 + \beta \phi(u_0) + \gamma \phi^2(u_0)) = \phi(0_E)$ donc $\alpha \phi(u_0) + \beta \phi^2(u_0) + \gamma \phi^3(u_0) = 0_E$ or $\phi^3(u_0) = \tilde{0}(u_0) = 0_E$ donc $\alpha \phi(u_0) + \beta \phi^2(u_0) = 0_E$ (Δ)on applique de nouveau ϕ : $\phi(\alpha \phi(u_0) + \beta \phi^2(u_0)) = \phi(0_E)$ cà d $\alpha \phi^2(u_0) + \beta \phi^3(u_0) = 0_E$ or $\phi^3(u_0) = 0_E$ donc $\alpha \phi^2(u_0) = 0_E$ or $\phi^2(u_0) \neq 0_E$ donc $\alpha = 0$.Si on revient à (Δ) on obtient $\beta \phi^2(u_0) = 0_E$ et $\phi^2(u_0) \neq 0_E$ donc $\beta = 0$ Si on revient à (*) on obtient $\gamma \phi^2(u_0) = 0_E$ et $\phi^2(u_0) \neq 0_E$ donc $\gamma = 0$ Ainsi la famille est libre et a 3 éléments $\Rightarrow$ c'est une base de E (2) Soit f un endomorphisme de E qui commute avec ϕ Comme $f(u_0)$ est un vecteur de E , il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3$ tq(Δ) $f(u_0) = \alpha u_0 + \beta \phi(u_0) + \gamma \phi^2(u_0)$ d'après la question précédente.Soit $g = \alpha \text{id}_E + \beta \phi + \gamma \phi^2$. Montrons que pour tout $x \in E$, $g(x) = f(x)$.Comme $x \in E$, $\exists (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3$ tq $x = x_1 u_0 + x_2 \phi(u_0) + x_3 \phi^2(u_0)$.

$$\begin{aligned} g(x) &= \alpha x + \beta \phi(x) + \gamma \phi^2(x) \quad \rightarrow \quad \phi \text{ est linéaire} \\ &= \alpha(x_1 u_0 + x_2 \phi(u_0) + x_3 \phi^2(u_0)) + \beta(x_1 \phi(u_0) + x_2 \phi^2(u_0) + x_3 \phi^3(u_0)) \\ &= \alpha x_1 u_0 + (\alpha x_2 + \beta x_1) \phi(u_0) + (\alpha x_3 + \beta x_2 + \gamma x_1) \phi^2(u_0) \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1 u_0 + x_2 \phi(u_0) + x_3 \phi^2(u_0)) \quad \rightarrow \quad f \text{ est linéaire} \\ &= x_1 f(u_0) + x_2 f(\phi(u_0)) + x_3 f(\phi^2(u_0)) \\ &= x_1 f(u_0) + x_2 \phi(f(u_0)) + x_3 \phi^2(f(u_0)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Delta) \quad f(u_0) &= x_1 (\alpha u_0 + \beta \phi(u_0) + \gamma \phi^2(u_0)) + x_2 \phi(\alpha u_0 + \beta \phi(u_0) + \gamma \phi^2(u_0)) + x_3 \phi^2(\alpha u_0 + \beta \phi(u_0) + \gamma \phi^2(u_0)) \\ &= \alpha x_1 u_0 + (\beta x_1 + \alpha x_2) \phi(u_0) + (\gamma x_1 + \beta x_2 + \alpha x_3) \phi^2(u_0) \end{aligned}$$

Ainsi $\forall x \in E$ $f(x) = g(x)$ donc $f = g$ sur E Les endomorphismes qui commutent avec ϕ sont bien de la forme

$$g = \alpha \text{id}_E + \beta \phi + \gamma \phi^2 \quad (\text{et la réciproque est vraie aussi})$$

Ex 13 • Montrons que $\text{rg}(g) \leq \dim \text{Ker} f$.

Pour cela on mg $\text{Im} g \subset \text{Ker} f$.

Soit $x \in \text{Im} g$. $\exists t \in \mathbb{R}^n$ tq $x = g(t)$

Alors $f(x) = f \circ g(t) = \tilde{0}(t) = 0$.

Donc $x \in \text{Ker} f$.

Ainsi $\text{Im} g \subset \text{Ker} f$ et $\dim(\text{Im} g) \leq \dim \text{Ker} f$

• Maintenant on applique le th du rang à f qui est linéaire, sachant que $\dim(\mathbb{R}^n) = n$

on a: $\dim \text{Ker} f + \dim \text{Im} f = n$.

Donc $\dim(\text{Im} g) + \dim \text{Im} f \leq \dim \text{Ker} f + \dim \text{Im} f = n$

Donc $\text{rg}(g) + \text{rg}(f) \leq n$.

TD 26 ex 16

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ où E Kev de dimension n .

$\Rightarrow$ supposons que p est un projecteur

p est le projecteur sur $\text{Im } p$ parallèlement à $\text{Ker } p$.

Introduisons q , projecteur sur $\text{Ker } p$ parallèlement à $\text{Im } p$, la projection associée à p . On a alors par déf, $p+q = \text{id}_E$, et on a par identification: $\text{Im } q = \text{Ker } p$ et $\text{Ker } q = \text{Im } p$.

On applique le théorème du rang à p :

$$\dim \text{Ker } p + \dim \text{Im } p = \dim E = n \quad (*)$$

$$\text{or } \text{Ker } p = \text{Im } q = \text{Im}(\text{id}_E - p) = \text{Im}(p - \text{id}_E)$$

$$\text{Donc } (*) \text{ devient } \dim(\text{Im}(p - \text{id}_E)) + \dim(\text{Im}(p)) = n$$

$$\text{Soit } \text{rg}(p - \text{id}_E) + \text{rg}(p) = n.$$

$\Leftarrow$ supposons que $\text{rg}(p) + \text{rg}(p - \text{id}_E) = n$ - Mq $p = \text{pop}$.

on applique le th du rang à p : $\dim \text{Ker } p + \dim \text{Im } p = n$

$$\text{à } p - \text{id}_E: \dim \text{Ker}(p - \text{id}_E) + \dim(\text{Im}(p - \text{id}_E)) = n$$

$$\text{on ajoute: } \dim \text{Ker } p + \text{rg } p + \dim \text{Ker}(p - \text{id}_E) + \text{rg}(p - \text{id}_E) = n + n$$

$$\text{or } \text{rg } p + \text{rg}(p - \text{id}_E) = n \text{ donc } \dim \text{Ker } p + \dim \text{Ker}(p - \text{id}_E) = n.$$

Montrons que $\text{Ker } p \oplus \text{Ker}(p - \text{id}_E)$. Ainsi on aura que $\text{Ker } p$ et $\text{Ker}(p - \text{id}_E)$ sont suppl de E .

Soit $x \in \text{Ker } p \cap \text{Ker}(p - \text{id}_E)$ alors $p(x) = 0_E$ et $p(x) - x = 0_E$

donc $p(x) = x = 0_E$ donc $x = 0_E$ donc $\text{Ker } p \cap \text{Ker}(p - \text{id}_E) \subset \{0_E\}$

or $\{0_E\} \subset \text{Ker } p \cap \text{Ker}(p - \text{id}_E)$. Donc $\text{Ker } p \cap \text{Ker}(p - \text{id}_E) = \{0_E\}$

$$\text{Ainsi } \text{Ker } p \oplus \text{Ker}(p - \text{id}_E) = E.$$

Soit $x \in E$. mq $p(x) = \text{pop}(x)$.

Comme $\text{Ker } p \oplus \text{Ker}(p - \text{id}_E) = E$, $\exists! x_1 \in \text{Ker } p \exists! x_2 \in \text{Ker}(p - \text{id}_E)$

$$\text{tq } x = x_1 + x_2$$

$$p(x) = p(x_1) + p(x_2) \text{ car } p \text{ lin or } x_1 \in \text{Ker } p \text{ donc } p(x_1) = 0_E$$

$$\Rightarrow p(x) = x_2$$

$$x_2 \in \text{Ker}(p - \text{id}_E) \text{ donc } p(x_2) = x_2$$

$$\text{et } \text{pop}(x) = p(p(x)) = p(x_2) = x_2$$

$$\text{Ainsi } \forall x \in E, p(x) = \text{pop}(x)$$

$$\Rightarrow p = \text{pop} \Rightarrow p \text{ est un projecteur}$$

$$\hookrightarrow p \in \mathcal{L}(E)$$