CORRIGE DU DS9 - MPSI - 12/04/24

Exercice 1 Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{Arcsin} x} - \dfrac{1}{x}$ f est continue sur $[-1,1]\setminus\{0\}$

f est impaire

① $\operatorname{Arcsin} x = x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^5}{40} + \underset{0}{o}(x^5)$

donc $f(x) = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{1+\frac{x^2}{6}+\frac{3x^4}{40}+\underset{0}{o}(x^4)}\right) - \dfrac{1}{x}$

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x^2}{6} - \frac{3x^4}{40} + \frac{x^4}{36} + \underset{0}{o}(x^4)\right) - \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(-\frac{x^2}{6} + x^4\left(-\frac{3}{40}+\frac{1}{36}\right) + \underset{0}{o}(x^4)\right)$$

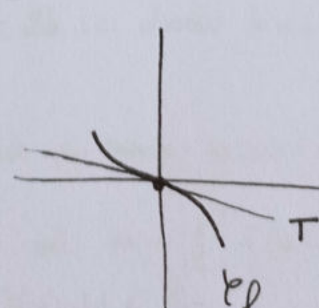
$$f(x) = -\frac{x}{6} - \frac{17x^3}{360} + \underset{0}{o}(x^3) \quad \text{donc } f(x) \underset{0}{\sim} -\frac{x}{6}$$

Ainsi f possède un DL à l'ordre 3 en 0 donc f possède un DL à l'ordre 1 en 0 et si on pose $f(0)=0$ (car $\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{x}{6} = 0$) alors f est définie en 0 et l'on peut dire que f est dérivable en 0 et son nombre dérivé en 0 est $f'(0) = -\dfrac{1}{6}$

De plus $f(x) - \left(-\dfrac{x}{6}\right) \sim \dfrac{-17x^3}{360}$

La tangente T à $\mathcal{C}_f$ au pt d'abscisse 0 a pour équation $y = -\dfrac{x}{6}$ et elle est au dessus de $\mathcal{C}_f$ à droite de 0 ($x>0$) et en dessous de $\mathcal{C}_f$ à gauche de 0 ($x<0$)

Le point 0 est donc un point d'inflexion.



Exercice 1

② Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction convexe. f est donc continue sur $\mathbb{R}$. De plus on suppose qu'elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Par le théorème de la bijection, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $J=f(\mathbb{R})$.
On note f^{-1} sa bijection réciproque. D'après le cours, f^{-1} est continue et strictement croissante sur J.
Soient $(x',y')\in J^2$ et $\alpha\in[0,1]$. On pose $x=f^{-1}(x')$ et $y=f^{-1}(y')$.

$f^{-1}(\alpha x'+(1-\alpha)y')=f^{-1}(\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y))$

or f est convexe donc $\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)\geqslant f(\alpha x+(1-\alpha)y)$.

et f^{-1} est croissante donc $f^{-1}(\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y))\geqslant f^{-1}(f(\alpha x+(1-\alpha)y))$.

Ainsi $f^{-1}(\alpha x'+(1-\alpha)y')\geqslant \alpha x+(1-\alpha)y=\alpha f^{-1}(x')+(1-\alpha)f^{-1}(y')$

et f^{-1} est concave sur J.

③ • $(F,+,\cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{C}([-1,1],+,\cdot)$, $\mathbb{R}$-espace-vectoriel de référence.
En effet : - $F\subset\mathscr{C}([-1,1])$ par définition
- $F\neq\emptyset$ car $0_{\mathcal{F}([-1,1],\mathbb{R})}\in F$ (c'est une fonction constante)
- F est stable par combinaison linéaire car toute combinaison linéaire de fonctions constantes est constante sur $[-1,1]$.

• $(G,+,\cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{C}([-1,1],+,\cdot)$. En effet,
- $G\subset\mathscr{C}([-1,1])$ par définition
- $G\neq\emptyset$ car $0_{\mathcal{F}([-1,1],\mathbb{R})}\in F$ car $\int_{-1}^{1}0_{\mathcal{F}([-1,1],\mathbb{R})}(t)\,dt=0$
- $\forall f,g\in G,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \int_{-1}^{1}(\alpha f+\beta g)(x)\,dx=\int_{-1}^{1}(\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x))\,dx$ par linéarité de l'intégrale
$=\alpha\int_{-1}^{1}f(x)\,dx+\beta\int_{-1}^{1}g(x)\,dx=\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0=0$.

donc $\alpha f+\beta g\in G$.

• Montrons que F et G sont supplémentaires dans $\mathscr{C}([-1,1])$
• $F\cap G=\{0_{\mathscr{C}([-1,1])}\}$
- $\{0_{\mathscr{C}([-1,1])}\}\subset F\cap G$ car $(F\cap G,+,\cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{C}([-1,1]),+,\cdot)$
- $F\cap G\subset\{0_{\mathscr{C}([-1,1])}\}$. Montrons le :
$\forall f\in F\cap G$, $f\in F$ donc f est constante : $\exists k\in\mathbb{R}\,/\,\forall x\in[-1,1], f(x)=k$
et $f\in G$ donc $\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=0$.

or $\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}k\,dx=k[x]_{-1}^{1}=2k=0$ donc $k=0$ et $f=0_{\mathscr{C}([-1,1])}$

• $F+G=\mathscr{C}([-1,1])$
- $F+G\subset\mathscr{C}([-1,1])$ car $(F+G,+,\cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{C}([-1,1]),+,\cdot)$
- $\mathscr{C}([-1,1])\subset F+G$. Montrons le :
$\forall f\in\mathscr{C}([-1,1])$, $f=M+f-M$ où $M=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx$
$M:x\mapsto M\in F$ et $f-M:x\mapsto f(x)-M\in G$

Conclusion : $(F,+,\cdot)$ et $(G,+,\cdot)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $(\mathscr{C}([-1,1],+,\cdot)$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. $\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à 0. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$f(-x) = (-x)\,\mathrm{sh}\left(-\frac{1}{x}\right) = x\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) \quad \text{car sh est impaire.}$$

Donc $\boxed{f \text{ est paire.}}$

2. (a) Au voisinage de 0, $\mathrm{sh}(X) \underset{X\to 0}{\sim} X$.

<u>Limite en $+\infty$:</u> Pour x tendant vers $+\infty$, on pose $X = 1/x$. Ainsi X tend vers 0^+ et

$$x\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\mathrm{sh}(X)}{X} \underset{X\to 0^+}{\sim} 1.$$

Ainsi $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.}$

<u>Limite en $-\infty$:</u> Par parité, $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1.}$

(b) <u>Limite en 0 :</u> Pour x tendant vers 0^+, on pose $X = 1/x$. Ainsi X tend vers $+\infty$ et $x\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\mathrm{sh}(X)}{X} = \frac{e^X - e^{-X}}{2X}$. Or $\lim_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ par croissances comparées et $\lim_{X\to+\infty} \frac{e^{-X}}{X} = 0$. Donc $\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty.}$

Par parité de f, $\boxed{\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty.}$

3. Sur $\mathbb{R}^*$, la fonction $x \longmapsto \mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable. En effet c'est la composée de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ et de la fonction sh qui est dérivable sur $\mathbb{R}$. Puis par produit de fonctions dérivables, $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^*}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) + x \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right) = \boxed{\left[\mathrm{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right]\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right).}$$

4. Pour $X \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $\varphi(X) = \mathrm{th}(X) - X$. φ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée

$$\forall X > 0, \quad \varphi'(X) = 1 - \mathrm{th}^2(X) - 1 = -\mathrm{th}^2 X < 0.$$

Donc φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc pour tout $X \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(X) < \varphi(0)$ soit $\boxed{\mathrm{th}(X) < X.}$

5. Comme la fonction ch est strictement positive, on trouve d'après la question A.4. que f' est strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit le tableau de variations suivant (grâce à la parité de f) :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	1	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1

6. Pour obtenir le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $X \longmapsto \frac{\mathrm{sh}(X)}{X}$, on effectue le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction sh :

$$\mathrm{sh}(X) = X + \frac{X^3}{6} + \frac{X^5}{120} + o(X^5).$$

Donc

$$\boxed{\frac{\mathrm{sh}(X)}{X} = 1 + \frac{X^2}{6} + \frac{X^4}{120} + o(X^4).}$$

7. On pose $X = \frac{1}{x}$. Ainsi lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, X tend vers 0. Donc pour X au voisinage de 0, on a d'après la question A.6,

$$f\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{\mathrm{sh}(X)}{X} = 1 + \frac{X^2}{6} + \frac{X^4}{120} + o(X^4),$$

soit pour x au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$,

$$f(x) = 1 + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{120x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

Il suffit donc de prendre $\boxed{a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = \frac{1}{6},\ a_3 = 0,\ a_4 = \frac{1}{120}.}$

8. La fonction $x \longmapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de deux fonctions dérivables (fonction f et fonction inverse). De plus, pour $x \in \mathbb{R}^*$ au voisinage de 0

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4),$$

Donc $\lim_{x \to 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$, ce qui prouve que f se prolonge par continuité en 0. En notant F ce prolongement, $F(0) = 1$ et F admet donc le développement limité suivant en 0 :

$$F(x) = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4).$$

Ainsi F admet un développement limité à l'ordre 4 en 0, donc aussi un développement limité à l'ordre 1 en 0 ce qui prouve que F est dérivable en 0.
Finalement, F étant aussi dérivable sur $\mathbb{R}^*$, on a prouvé que $\boxed{\text{la fonction } F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.}$

Exercice 3

PARTIE I :

1) On remarque que ${}^tA = A$ donc ${}^tA.A = A^2 = A.{}^tA$ donc A vérifie la relation (1)

De même on remarque ${}^tC = -C$ donc ${}^tC.C = -C^2 = C.{}^tC$ donc C vérifie la relation (1)

2) $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

On en déduit que selon la parité de n on a $A^n = A$ ou $A^n = I$. Dans les deux cas ces matrices vérifient la relation (1)

3) Pour montrer que A est inversible il suffit de prouver que son déterminant est non nul :

$det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ ou encore puisque $A^2 = I$, A est inversible d'inverse lui-même.

4) U vérifie la relation (1) car comme pour la matrice A elle est symétrique.

Montrons : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U^n = 2^{n-1}U$ par récurrence :

Pour n=1 le résultat donne $U = 2^0.U$ donc est vrai

Supposons que pour un entier n on a $U^n = 2^{n-1}U$ et montrons la relation au rang n+1 : $U^{n+1} = U.U^n = 2^{n-1}.U^2$ par hypothèse de récurrence; Or $U^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$=2U. D'où $U^{n+1} = 2^{n-1}.2.U = 2^n.U$

Les puissances U^n, vérifient donc(1) puisque ce sont les mêmes que U à une constante multiplicative près.

5) $A + C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ donc $(A+C).{}^t(A+C) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ et ${}^t(A+C).(A+C) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Cela prouve que A+C ne commute pas avec sa transposée donc on a : $A \in E$, $C \in E$ et $A + C \notin E$. Cela contredit la stabilité de E par somme donc la structure d'espace vectoriel.

6) ${}^tMM = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+c^2 & ab+dc \\ ab+dc & b^2+d^2 \end{bmatrix}$.

De même on obtient : $M^tM = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{bmatrix}$.

Donc $M \in E \Leftrightarrow \begin{cases} ac+bd &= ab+dc \\ a^2+b^2 &= a^2+c^2 \\ b^2+d^2 &= c^2+d^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = c \\ ac+cd = ac+dc \end{cases}$ ou bien $\begin{cases} b = -c \\ ac-cd = -ac+dc \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ b=c ou bien $\begin{cases} b &= -c \\ d = & -a \end{cases} \Leftrightarrow M = \begin{bmatrix} a & c \\ c & d \end{bmatrix}$ ou bien $M = \begin{bmatrix} a & -c \\ c & a \end{bmatrix}$

7) $M \in E \Leftrightarrow M \in Vect(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix})$ <u>ou</u> bien $M \in Vect(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix})$

E est donc bien la réunion de deux espaces vectoriels

8) Calculons $U.C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Montrons qu'alors cette matrice n'est pas dans E_2 car ne commute pas avec sa transposée :

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

On n'a donc pas la propriété proposée puisque U et C en donnent un contre-exemple: $U \in E_2$, $C \in E_2$ mais $U.C \notin E_2$

PARTIE II

1) $S^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$S.{}^tS = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et ${}^tS.S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ donc $S \in E_3$

De même : $S^2.{}^t(S^2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et ${}^t(S^2).S^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ donc $S^2 \in E_3$

2) On a $F = Vect(I_3, S, S^2) = \{aI_3 + bS + cS^2, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$. I_3, S et S^2 sont inclus dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc $F \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et F est un sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrons que $F \subset E_3$

Soit $R \in F$. Il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tq $R = aI_3 + bS + cS^2$

${}^tR.R = (aI_3 + b{}^tS + c{}^t(S^2)).(aI_3 + bS + cS^2) = (a^2+b^2+c^2)I_3 + a.b(S + {}^tS) + a.c({}^t(S^2) + S^2) + b.c(S.{}^t(S^2) + S^2.{}^tS) = (a^2+b^2+c^2)I_3 + a.b(S + {}^tS) + a.c({}^t(S^2) + S^2) + b.c(S + {}^tS)$

et $R.{}^tR = (aI_3 + bS + cS^2).(aI_3 + b{}^tS + c{}^t(S^2)) = (a^2+b^2+c^2)I_3 + a.b(S + {}^tS) + a.c({}^t(S^2) + S^2) + b.c(S.{}^t(S^2) + S^2.{}^tS) = {}^tR.R$ donc $\underline{R \in E_3}$ et donc $F \subset E_3$.

3) Soient (a,b,c) et (d,e,f) deux éléments de $\mathbb{R}^3$ et soit $R = aI_3 + bS + cS^2$ et $T = dI_3 + eS + fS^2$.

$R.T = adI_3 + (ae+bd)S + (af+be+cd)S^2 + (bf+ce)S^3 + cfS^4 = adI_3 + (ae+bd)S + (af+be+cd)S^2 - (bf+ce)I_3 - cfS$ car on prouve aisément que $S^3 = -I_3$. Donc $R.T \in Vect(I_3, S, S^2) = F$ et F est bien stable par multiplication.

Exercice 4

(1) Soit $n \geq 3$. $f_n : x \mapsto x - n\ln(x)$ est continue sur $]1,2[$ et dérivable sur $]1,2[$ en tant que somme de fonctions continues et en tant que somme de fonctions dérivables.

$\forall x \in]1,2[, f_n'(x) = 1 - \frac{n}{x} = \frac{x-n}{x}$ et $f_n'(x) > 0$ ssi $\frac{x-n}{x} > 0$ ssi $x > n$

car $x \in]1,2[$. Or $n \geq 3$ donc $\forall x \in]1,2[, x \leq n$.

Ainsi f_n est strictement décroissante sur $]1,2[$ et continue sur $]1,2[$.

Elle réalise une bijection de $]1,2[$ vers $]2-n\ln 2, 1[$ par le théorème de la bijection. De plus $n \geq 3$ et $\ln 2 > 0{,}69$ donc $n\ln 2 > 3 \times 0{,}69 = 2{,}07$ et donc $-n\ln 2 < -2{,}07$

et $2 - n\ln 2 < -0{,}07 < 0$ donc $0 \in]2-n\ln 2, 1[$ donc 0 a un unique antécédent par f_n dans $]1,2[$.

$\underline{\forall n \geq 3, \exists! a_n \in]1,2[\text{ tq } f_n(a_n) = 0.}$

(2) Soit $n \geq 3$. $f_n(a_n) = 0$ et $f_n(a_{n-1}) = a_{n-1} - n\ln(a_{n-1})$

or $f_{n-1}(a_{n-1}) = 0$ donc $0 = a_{n-1} - (n-1)\ln(a_{n-1}) = a_{n-1} - n\ln(a_{n-1}) + \ln(a_{n-1})$

Donc $f_n(a_{n-1}) = -\ln(a_{n-1})$ or $a_{n-1} \in]1,2[$ donc $\ln(a_{n-1}) > 0$

donc $f_n(a_{n-1}) < 0$ donc $f_n(a_{n-1}) < f_n(a_n)$

or f_n est strictement décroissante sur $]1,2[$ donc si $a_{n-1} < a_n$

alors $f_n(a_{n-1}) > f_n(a_n)$ absurde ! Et si $a_{n-1} = a_n$ alors $f(a_{n-1}) = f(a_n)$

$\Rightarrow$ absurde également

Donc $a_{n-1} > a_n$ et $\underline{(a_n) \text{ est str décroissante}}$.

(3) On sait que $a_n \in]1,2[$ pour tout $n \geq 3$ donc (a_n) est minorée par 1

Par le th de la limite monotone, (a_n) converge (décroissante minorée)

Soit ℓ sa limite. Comme $a_n \in]1,2[$ pour tout $n \geq 3$, $\ell \in [1,3]$.

Raisonnons par l'absurde en supposant que $\ell \neq 1$.

$\forall n \geq 3 \quad 0 = a_n - n\ln(a_n)$ donc $\forall n \geq 3 \; a_n = n\ln(a_n)$.

or $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$ et $\lim_{n\to+\infty} n\ln(a_n) = +\infty$ car $\ln(a_n) \to \ln(\ell)$

et $\ell > 1$ donc $\ln(\ell) > 0$. On obtient $\ell = +\infty$ absurde car

$\ell \in [1,3]$. $\underline{\text{Concl} : \ell = 1}$

(4) Soit $n \geq 3$. $a_n = 1 + \varepsilon_n \Rightarrow 0 = (1+\varepsilon_n) - n\ln(1+\varepsilon_n)$ car $f_n(a_n) = 0$

$\Rightarrow 1 + \varepsilon_n = n\ln(1+\varepsilon_n) \Rightarrow \frac{1}{n} = \frac{\ln(1+\varepsilon_n)}{1+\varepsilon_n}$

($a_n > 1$ donc $1+\varepsilon_n > 1$ donc $1+\varepsilon_n \neq 0$ et $n \neq 0$ car $n \geq 3$)

$\Rightarrow \underline{\frac{1}{n} = \phi(\varepsilon_n)}$

5. ϕ est un quotient défini de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$ donc ϕ est $\mathcal{C}^\infty$ donc par le théorème de Taylor, ϕ admet en 0 un DL à tout ordre.

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$

Donc $\phi(x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 - x + x^2 + o(x^2)\right) = x - x^2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

càd $\underline{\phi(x) = x - \frac{3x^2}{2} + o(x^2)}$.

6. ϕ est continue sur $[0,1]$ en tant que produit de fcts continues sur $[0,1]$
De même, ϕ est dérivable sur $[0,1]$.

$\forall x \in [0,1]$, $\phi'(x) = \dfrac{\frac{1}{1+x} \times (1+x) - \ln(1+x)}{(1+x)^2} = \dfrac{1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2}$

$1 - \ln(1+x) > 0$ ssi $1 > \ln(1+x)$ ssi $e > 1+x$ ssi $x < e-1$
ce qui est le cas car $x \in [0,1]$

Donc ϕ est stt croissante sur $[0,1]$. Par le th de la bijection, ϕ réalise une bijection de $[0,1]$ vers $[0, \frac{\ln 2}{2}]$

ϕ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$ et ϕ' ne s'annule pas sur $[0,1]$ donc ϕ^{-1} est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, \frac{\ln 2}{2}]$ et elle admet donc un DL à tout ordre en 0.

Le $DL_2(0)$ de ϕ^{-1} a pour forme : $\phi^{-1}(y) = a + by + cy^2 + o(y^2)$.
avec $a = \phi^{-1}(0) = 0$ car $\phi(0) = 0$. càd $\phi^{-1}(y) = by + cy^2 + o(y^2)$

D'autre part $\phi^{-1}(\phi(x)) = x$ mais aussi :

$$\phi^{-1}(\phi(x)) = b\phi(x) + c(\phi(x))^2 + o((\phi(x))^2)$$

$$\phi^{-1}(\phi(x)) = b\left(x - \frac{3x^2}{2} + o(x^2)\right) + c\left(x - \frac{3x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 + o\left(\left(x - \frac{3x^2}{2} + o(x^2)\right)^2\right)$$

$$\phi^{-1}(\phi(x)) = bx - \frac{3b}{2}x^2 + cx^2 + o(x^2)$$

On identifie ces deux $DL_2(0)$ de ϕ^{-1} et par unicité du DL : on obtient $x = bx + \left(-\frac{3b}{2} + c\right)x^2 + o(x^2)$ càd $\begin{cases} b = 1 \\ -\frac{3b}{2} + c = 0 \end{cases}$

Ainsi le $DL_2(0)$ de ϕ^{-1} est $\underline{\phi^{-1}(y) = y + \frac{3y^2}{2} + o(y^2)}$.

7. Donc $\varepsilon_n = \phi^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{n}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2\right) = \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

et $\underline{a_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$