

# Chapitre 26 : Matrices et applications linéaires

## Introduction

Dans le chapitre 23 on a démontré la propriété suivante :

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $(f_1, \dots, f_n)$  une famille de  $F$

$\exists! u \in \mathcal{L}(E, F) \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad u(e_i) = f_i.$

Cela signifie qu'étant donnés deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels finis  $E$  et  $F$ , une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  de  $E$  et une base  $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$  de  $F$ , une application linéaire  $f$  de  $E$  dans  $F$  est entièrement déterminée par la donnée de  $f(e_1), \dots, f(e_p)$ , qui eux-mêmes sont déterminés par leurs coordonnées dans la base  $\mathcal{C}$  de  $F$ . Ces coordonnées peuvent être rangées dans une matrice.

## 1 Matrices et applications linéaires

Soit  $\mathbb{K}$  un corps commutatif et  $(n, p) \in \mathbb{N}^*$ .

### 1.1 Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs

#### Définition 1.

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$  ev de dimension  $n$ . Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

Soit  $x = \sum_{k=0}^n x_k e_k \in E$ . La matrice de  $x$  dans la base  $\mathcal{B}$  est la matrice colonne :  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$

### 1.2 Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases

Soient  $E$  et  $F$  deux  $K$ -espaces vectoriels de dimensions finies respectives  $p$  et  $n$ . Soit  $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_p)$  une base de  $E$  et  $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_n)$  une base de  $F$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

$f$  est complètement déterminée par la définition de  $f(u_1), \dots, f(u_p)$  qui sont eux-mêmes complètement définis par

leurs coordonnées par rapport à  $\mathcal{B}'$ . Soit  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $f(u_j) = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ . Ainsi  $f(u_1) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$  ...  $f(u_p) = \begin{pmatrix} \alpha_{1p} \\ \alpha_{2p} \\ \vdots \\ \alpha_{np} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ .

$f$  est complètement définie par la donnée de  $n \times p$  coefficients  $\alpha_{ij}$  c'est-à-dire par une matrice à  $n$  lignes et à  $p$

colonnes  $M \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  :  $\begin{pmatrix} f(u_1) & \cdots & f(u_p) \\ v_1 & \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1p} \end{pmatrix} \\ & \vdots & \\ v_n & \begin{pmatrix} \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{np} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = M$

#### Définition 2 (Matrice d'une application linéaire).

Dans ce contexte,  $M$  est appelée matrice de  $f$  par rapport aux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  et est notée  $M = \text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f)$ .

La  $j^{\text{eme}}$  colonne de  $M$  représente les coordonnées de  $f(u_j)$  par rapport à  $\mathcal{B}'$ .

$f(u_j)$  est le  $j^{\text{eme}}$  vecteur colonne de  $M$ .

**Remarque 1.**  $\forall M \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}), \exists ! f \in \mathcal{L}(E, F) \mid M = \text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f)$ . En effet soit  $M = (\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ .

Soit  $w_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}, \dots, w_p = \begin{pmatrix} \alpha_{1p} \\ \alpha_{2p} \\ \vdots \\ \alpha_{np} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \in F, \exists ! f \in \mathcal{L}(E, F), \forall j \in [[1, p]], f(u_j) = w_j$  donc  $\exists ! f \in \mathcal{L}(E, F) \mid M = \text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f)$ .

Si on change de base, on change de matrice.

### 1.3 Calcul des coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F), M = (\alpha_{ij}) = \text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f). \forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \in E$ , quelles sont les coordonnées de  $f(x)$  par rapport à

$\mathcal{B}'$  ?

$$x = x_1 u_1 + \dots + x_p u_p.$$

$$f(x) = x_1 f(u_1) + \dots + x_p f(u_p).$$

$$\text{Or } f(u_1) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}, \dots, f(u_p) = \begin{pmatrix} \alpha_{1p} \\ \alpha_{2p} \\ \vdots \\ \alpha_{np} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}. \text{ Donc } f(x) = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \text{ avec } \begin{cases} x'_1 = \alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1p}x_p \\ \vdots \\ x'_i = \alpha_{i1}x_1 + \dots + \alpha_{ip}x_p \\ \vdots \\ x'_n = \alpha_{n1}x_1 + \dots + \alpha_{np}x_p \end{cases}$$

On reconnait ici la formule analytique d'une application linéaire.

$\forall i \in [[1..n]], x'_i = \sum_{j=1}^p \alpha_{ij}x_j$ .  $x'_i$  s'obtient en faisant la somme des produits deux à deux des éléments de la  $i^{\text{eme}}$  ligne de  $M$  avec les coordonnées de  $x$ .

### 1.4 Exemples

► Exemple : soit  $E = \mathbb{R}^2$ .  $\mathcal{B} = (i, j)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

$r$  est la rotation de centre 0 et d'angle  $\theta$ .

Ecrire  $\text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(r), \text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(r^2), \text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(r^{-1}), \text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\text{id}), \text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(-\text{id}), \text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(-r)$ .

► Exemple :  $E = \mathbb{K}_p[X], (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$  et  $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^p)$ .  $F = \mathbb{K}^n, \mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ .

On pose  $\phi : E \rightarrow F, P \mapsto (P(a_1), \dots, P(a_n))$ . Vérifier que  $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ . Ecrire  $\text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\phi)$ .

► Exemple : **matrice d'une forme linéaire**. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace-vectoriel de dimension  $p$  et de base  $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_p)$  et  $\phi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ . Soit  $\mathcal{B}' = (1)$  la base canonique de  $\mathbb{K}$ .

$$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \in E, \phi(x) = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_p x_p \text{ où } \alpha_i = \phi(u_i) \text{ pour } i \in \{1, \dots, p\}.$$

$$\text{Donc } \text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\phi) = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_p).$$

► Exemple :  $E = \mathbb{R}_p[X]$  et  $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^p)$  et  $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}, P \mapsto P(1)$  et  $\psi : E \rightarrow \mathbb{R}, P \mapsto \int_0^1 P(t)dt$  ; écrire  $\text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\phi)$  et  $\text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\psi)$ .

### 1.5 Opérations sur les matrices

**Propriété 1.**

Soit  $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_p)$  une base de  $E$  (de dimension  $p$ ) et  $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_n)$  une base de  $F$  (de dimension  $n$ ) fixées.  
 On note  $\phi_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{M}_{np}(K)$ ,  $f \mapsto \text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f)$ .  
 $\phi_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$  est une bijection.

Cas où  $E = F$  : isomorphisme d'espaces vectoriels et d'anneaux de  $\mathcal{L}(E)$  sur  $\mathcal{M}_n(K)$  induit par le choix d'une base.  
 On rappelle que  $(\mathcal{M}_{np}(K), +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \times p$ .

**Définition 3 (Somme de deux matrices et produit par un scalaire).**

Soient  $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$ .  
 $\exists! f_1 \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $M_1 = \text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f_1)$ .  
 $\exists! f_2 \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $M_2 = \text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f_2)$ .  
 $\text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f_1 + f_2) = M_1 + M_2$ .  
 $\text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\alpha f_1) = \alpha M_1$ .

**Définition 4 (Matrice nulle, opposé d'une matrice).**

$\text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(0) = (0)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} = 0_{\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})}$ .  
 $\forall M = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ ,  $\exists! f \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $M = \text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f)$  et  $\text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(-f) = -M$ .

**Définition 5 (Produit de deux matrices).**

Soient  $E, F$  et  $G$  trois  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions  $p, n, m \in \mathbb{N}^*$ .  
 Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ .  $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$ .  
 Soit  $\mathcal{B}_1 = (u_1, \dots, u_p)$  une base de  $E$ .  
 Soit  $\mathcal{B}_2 = (v_1, \dots, v_n)$  une base de  $F$ .  
 Soit  $\mathcal{B}_3 = (w_1, \dots, w_m)$  une base de  $G$ .  
 Soit  $B = \text{mat}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(f) = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ .  
 Soit  $A = \text{mat}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3}(g) = (a_{ki})_{1 \leq k \leq m, 1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ .  
 $\text{mat}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_3}(g \circ f) = \text{mat}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3}(g) \times \text{mat}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(f) = A \times B$ .

Rappel :

Soit  $A = (a_{ki})_{1 \leq k \leq m, 1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$  et  $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ .

$A \times B = (c_{kj})_{1 \leq k \leq m, 1 \leq j \leq p} \in \mathcal{M}_{mp}(\mathbb{K})$  avec

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^n a_{ki} b_{ij} = a_{k1} b_{1j} + a_{k2} b_{2j} + \dots + a_{kn} b_{nj}.$$

**1.6 Lien entre matrices inversibles et isomorphismes****Propriété 2 (Caractérisation d'une matrice inversible).**

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = M$ , alors  $M$  est **inversible** ssi  $f$  est bijective et dans ce cas  $M^{-1} = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1})$ .

Plus généralement, si  $E$  et  $F$  sont deux sev de même dimension  $n$  munis de deux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ , alors  $f$  est bijective ssi  $\text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f)$  est inversible et  $(\text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f))^{-1} = \text{mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(f^{-1})$ .

**2 Changement de base****2.1 Matrice dans une base d'une famille de vecteurs**

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  et de base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ .

**Définition 6.**

On appelle matrice de la famille  $(x_1, \dots, x_p)$  dans la base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ , la matrice dont la  $j^{\text{ème}}$  colonne est

la famille des coordonnées de  $x_j$  dans  $\mathcal{B}$ . On note  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p) = \begin{matrix} & x_1 & \cdots & x_p \\ \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} & \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix} \end{matrix}$

où  $x_j = \sum_{k=1}^n x_{kj} e_k$ .

► Exemple : Ecrire la matrice de la famille  $(e_1 + e_2 + e_3, e_1 + 2e_2 + e_3, e_1 + e_2 + 2e_3)$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$  de  $\mathbb{R}^3$ .

**Définition 7.**

1.  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(x) = X$  vecteur colonne des coordonnées de  $x$  dans  $\mathcal{B}$
2.  $\text{mat}_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2}(u) = \text{mat}_{\mathcal{B}_2}(u(\mathcal{B}_1))$ .

**Propriété 3.**

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et de base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  et soit  $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ .

$\mathcal{F}$  est une base de  $E$  si et seulement si  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$  est une matrice inversible.

**2.2 Influence d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soient  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  et  $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  deux bases de  $E$ .

Soit  $x \in E$ .  $x$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  dans la base  $\mathcal{B}$  et  $\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

**Question :** quelle relation y a-t-il entre  $X$  et  $X'$  ?

$$\forall j \in [[1, n]], \exists! (\alpha_{1j}, \dots, \alpha_{nj}) \in \mathbb{K}^n, e'_j \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

$$x = \sum_{j=1}^n x'_j e'_j = \sum_{j=1}^n x'_j \left( \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} e_i \right)$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x'_j \alpha_{ij} e_i = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x'_j \right) e_i$$

D'où, par unicité des coordonnées par rapport à la base  $\mathcal{B}$  :

$$\forall i \in [[1, n]], x_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x'_j.$$

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11} x'_1 + \alpha_{12} x'_2 + \cdots + \alpha_{1n} x'_n \\ \vdots \\ x_n = \alpha_{n1} x'_1 + \alpha_{n2} x'_2 + \cdots + \alpha_{nn} x'_n \end{cases}$$

Ce qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

$$X = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \times X'$$

où  $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} e'_1 & \cdots & e'_n \\ e_1 & \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_n & \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ .

**Remarque 2.** La matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$  est, par définition, la matrice de la famille  $\mathcal{B}'$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Sa  $j^{\text{ème}}$  colonne est constituée des coordonnées dans la base  $\mathcal{B}$  du  $j^{\text{ème}}$  vecteur de la base  $\mathcal{B}'$ .

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{id}_E) = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}').$$

De même, il existe une matrice de passage de  $\mathcal{B}'$  à  $\mathcal{B}$  :  $P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$ .

$$P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\text{id}_E).$$

$$I_n = \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}'}(\text{id}_E) \text{ donc } P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} \times P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = I_n.$$

$$\text{De même } I_n = \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(\text{id}_E) \text{ donc } P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = I_n.$$

### Propriété 4.

La matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  est inversible (c'est-à-dire est un élément de  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ ) et  $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$ .

### Propriété 5 (Relation de Chasles pour les matrices de passage).

Soient  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{B}''$  trois bases de  $E$ .  $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}$ .

## 2.3 Influence d'un changement de base sur la matrice d'une application linéaire

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $p \in \mathbb{N}^*$ .

Soient  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  et  $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$  deux bases de  $E$ .

Soit  $F$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soient  $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$  et  $\mathcal{C}' = (f'_1, \dots, f'_n)$  deux bases de  $F$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

Soient  $A = \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$  et  $A' = \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(f)$ .

**Question :** trouver une relation entre  $A$  et  $A'$ .

Soit  $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ .

Soit  $Q = P_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ .

$f = \text{id}_F \circ f \circ \text{id}_E$  donc

$$\text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(f) = \text{mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'}(\text{id}_F) \times \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \times \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{id}_E).$$

$$\text{D'où } A' = P_{\mathcal{C}', \mathcal{C}} \times A \times P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}.$$

$$A' = Q^{-1}AP \text{ où } A' = \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(f), A = \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f), P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \text{ et } Q = P_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'}.$$

**Remarque 3.** Comme  $P$  et  $Q$  sont inversibles,  $A = QA'P^{-1}$ .

## 2.4 Influence d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme

Si  $E = F$ ,  $\mathcal{B} = \mathcal{C}$  et  $\mathcal{B}' = \mathcal{C}'$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

$$A' = P^{-1}AP \text{ où } A' = \text{mat}_{\mathcal{B}'}(f), A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f) \text{ et } P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}.$$

Ici  $P = Q$ .

### 3 Matrices semblables. Noyau, image et rang d'une matrice

#### 3.1 Matrices semblables

##### Définition 8.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A, B$  deux matrices carrées de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .  
On dit que  $A$  est semblable à  $B$  lorsqu'il existe une matrice inversible  $P$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $A = PBP^{-1}$ .

##### Propriété 6.

Si  $B$  est semblable à  $A$  alors  $A$  est semblable à  $B$ .  
La relation "être semblable à" est une relation d'équivalence sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

##### Propriété 7.

Deux matrices carrées d'ordre  $n$  sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases de  $\mathbb{K}^n$ , c'est-à-dire s'il existe  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$  et deux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  de  $\mathbb{K}^n$  tels que  $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$  et  $B = \text{mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ .

##### Propriété 8.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A, B$  deux matrices carrées de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , semblables. Alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A^k$  et  $B^k$  sont semblables (avec la même matrice  $P$ ).

##### Propriété 9 (Invariance de la trace par similitude).

Deux matrices carrées semblables ont même trace.  
Si  $A = PBP^{-1}$ ,  $\text{tr}(A) = \text{tr}(PBP^{-1}) = \text{tr}(BPP^{-1}) = \text{tr}(B)$ .

#### 3.2 Application linéaire canoniquement associée à une matrice

##### Définition 9.

Soit  $M = (\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ . Si  $E = \mathbb{K}^p$  et  $F = \mathbb{K}^n$  sont munis de leurs bases canoniques  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  avec  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  et  $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n) \mid \forall j \in [1, p], f(e_j) = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ .

On a alors  $M = \text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f)$ .  
 $f$  est appelée **application linéaire canonique associée à  $M$** .

Montrer que  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  sont semblables et exprimer le lien matriciel. En déduire  $A^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

#### 3.3 Image et noyau d'une matrice

##### Définition 10 (Image et noyau d'une matrice).

Soit  $M \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ .  
Soit  $f$  l'application linéaire canonique associée à  $M$ . On a  $f : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n, x \mapsto f(x)$ . On note  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{K}^p$  et  $\mathcal{C}$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ .  
On appelle **noyau de  $M$**  l'ensemble :  $\text{Ker}(M) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid MX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\} = \{\text{mat}_{\mathcal{B}}(x) \mid x \in \text{Ker}(f)\}$ .  
On appelle **image de  $M$**  l'ensemble :  $\text{Im}(M) = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid \exists X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), MX = Y\}$   
 $= \{\text{mat}_{\mathcal{C}}(y) \mid y \in \text{Im}(f)\}$ .

**Propriété 10 (Théorème du rang pour les matrices).**

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .  $\dim \text{Ker} M + \dim \text{Im} M = n$ .

**Propriété 11.**

Soit  $M \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ .

Les colonnes de  $M$  engendrent  $\text{Im} M$ .

Les lignes de  $M$  donnent un système d'équations de  $\text{Ker} M$ .

**3.4 Rang d'une matrice****Définition 11 (Rang d'une matrice).**

Soit  $M \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ . On appelle rang de  $M$  et on note  $\text{rg}(M)$  le rang de la famille des vecteurs colonnes de  $M$  dans  $\mathbb{K}^n$ .

$$M = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_p \\ a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

$$\text{rg}(M) = \text{rg}(C_1, \dots, C_p) = \dim(\text{Vect}(\{C_1, \dots, C_p\})).$$

**Remarque 4.**  $\text{Vect}(\{C_1, \dots, C_p\})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^n$ .

$$\text{rg}(M) \leq p \text{ et } \text{rg}(M) \leq n.$$

$$\text{rg}(M) = \dim \text{Im} M$$

**Propriété 12.**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $p$  et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ .

Soient  $F$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $\mathcal{C}$  une base de  $F$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $M = \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ .

Alors  $\text{rg}(f) = \text{rg}(M)$ .

En particulier, le rang de  $A$  est celui de l'application linéaire canoniquement associée à  $A$ .

**Propriété 13 (Caractérisation d'une matrice inversible par son rang).**

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .  $M$  est inversible ssi  $\text{rg}(M) = n$ .

**Propriété 14 (Rang et matrices semblables).**

Deux matrices semblables ont même rang.

Réciproque fautive :  $I_n$  et  $5I_n$  ont même rang mais ne sont pas semblables.

**3.5 Rang et opérations élémentaires****Propriété 15 (Rang et opérations élémentaires).**

- Multiplier une matrice à droite ou à gauche par une matrice inversible ne change pas le rang.
- Appliquer une opération élémentaire à une matrice ne change pas le rang de cette matrice.

**4 Retour aux systèmes**

On peut interpréter de plusieurs façons le système linéaire  $S$  de  $n$  équations à  $p$  inconnues suivant :

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p = 0 \end{cases}.$$

On note dans toute la suite  $A$  la matrice de  $S$ . On appelle **rang du système**, le rang de la matrice  $A$  associée.

#### 4.1 Interprétation vectorielle

Soient  $C_1, C_2, \dots, C_p$  les vecteurs colonnes de  $A$ . Soit  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ . Le système  $S$  s'écrit  $\sum_{j=1}^p x_j C_j = B$ .

Réciproquement, si  $v_1, v_2, \dots, v_p$  et  $b$  sont  $p+1$  vecteurs d'un espace vectoriel de dimension  $n$  et de base  $\mathcal{B}$ , l'équation  $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_p v_p = b$  d'inconnue  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$  se traduit dans la base  $\mathcal{B}$  par un système linéaire de  $n$  équations à  $p$  inconnues.

##### Propriété 16.

On a les assertions suivantes :

- le système  $S$  est compatible ssi  $B \in \text{Vect}\{C_1, C_2, \dots, C_p\}$ . En particulier si  $(C_1, C_2, \dots, C_p)$  est génératrice de  $\mathbb{K}^n$ , c'est-à-dire si  $\text{rg}(C_1, C_2, \dots, C_p) = n$ ,  $S$  est compatible,
- le rang de  $S$  est égal au rang de  $(C_1, C_2, \dots, C_p)$ ,
- si la famille  $(C_1, C_2, \dots, C_p)$  est libre alors le système  $S$  possède au plus une solution,
- si  $n = p$  et si la famille  $(C_1, C_2, \dots, C_n)$  est une base de  $\mathbb{K}^n$  et pour tout  $B$  le système possède une unique solution (formée des composantes de  $B$  dans la base  $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ ).

#### 4.2 Interprétation à l'aide d'une application linéaire

Soit  $u$  l'application linéaire de  $\mathbb{K}^p$  dans  $\mathbb{K}^n$  canoniquement associée à  $A$ . Soit  $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$  et  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  alors le système  $S$  s'écrit  $u(x) = b$ .

Réciproquement, étant donnés deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels  $E$  et  $F$  de dimensions  $p$  et  $n$ , une application linéaire  $u$  de  $E$  dans  $F$  et un vecteur  $b \in F$ , l'équation  $u(x) = b$  d'inconnue  $x$  se traduit par un système linéaire à  $n$  équations et  $p$  inconnues.

##### Propriété 17.

On a les assertions suivantes :

- le système  $S$  est compatible ssi  $b \in \text{Im}(u)$ . En particulier si  $u$  est surjective alors  $S$  est compatible,
- si  $u$  est injective  $S$  possède au plus une solution,
- si  $u$  est bijective  $S$  possède une unique solution,
- si  $x_0$  est solution de  $S$  alors l'ensemble des solutions de  $S$  est  $x_0 + \text{Ker}(u)$ ,
- $\text{rg}(S) = \text{rg}(u)$ ,
- si  $S$  est un système de rang  $r$  alors l'ensemble des solutions de  $S_H$  est un sev de  $\mathbb{K}^p$  de dimension  $p-r$ .

#### 4.3 Interprétation à l'aide de formes linéaires

Soient  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  les formes linéaires sur  $\mathbb{K}^p$  canaoniquement associées aux lignes de  $A$ . Soient  $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$  et  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ .  $S$  s'écrit alors 
$$\begin{cases} \phi_1(x) = b_1 \\ \vdots \\ \phi_n(x) = b_n \end{cases}$$

Réciproquement, étant donnés un  $K$ -espace vectoriel  $E$  de dimension  $p$  et des formes linéaires  $\phi_1, \dots, \phi_n$  sur  $E$ , le système d'équations d'inconnue  $x \in E$  : 
$$\begin{cases} \phi_1(x) = b_1 \\ \vdots \\ \phi_n(x) = b_n \end{cases}$$
 se traduit par un système de  $n$  équations à  $p$  inconnues.



**Propriété 18.**

On a les assertions suivantes :

- l'ensemble des solutions de  $S_0$ , système homogène associé à  $S$ , est l'intersection des noyaux des formes linéaires  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  (intersection de  $n$  hyperplans vectoriels de  $\mathbb{K}^p$ ),
- si  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  sont indépendantes, alors  $\text{rg}(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) = \text{rg}(S) = n$  et la dimension de l'intersection des  $n$  noyaux des formes linéaires est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^p$  de dimension  $p - \text{rg}(S) = p - n$ .

**4.4 Systèmes de Cramer****Définition 12.**

Si  $S$  est un système linéaire de  $n$  équations à  $n$  inconnues, il est équivalent de dire :

- $S$  admet une unique solution,
- le système homogène associé  $S_0$  a pour solution unique  $(0, 0, \dots, 0)$ ,
- la matrice du système est inversible.

On appelle **système de Cramer** tout système linéaire de  $n$  équations à  $n$  inconnues vérifiant l'une des propriétés précédentes.

**5 Matrices équivalentes****Définition 13 (Matrices  $J_r$ ).**

Soient  $n$  et  $p$  deux entiers non nuls et  $r$  un entier inférieur à  $n$  et à  $p$ .

On pose  $J_r = (\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  où  $\alpha_{ij} = 1$  si  $i = j \leq r$  et  $\alpha_{ij} = 0$  sinon.

$$J_r = \begin{matrix} & \begin{matrix} r & p-r \end{matrix} \\ \begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

La matrice  $J_r$  a tous ses coefficients nuls à l'exception des  $r$  premiers coefficients diagonaux, égaux à 1. Quel est le rang de  $J_r$  ?

**Propriété 19 (Expression de  $J_r$  à l'aide d'une application linéaire).**

Si  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  est de rang  $r$ , il existe un couple de bases dans lequel  $u$  a pour matrice  $J_r$ .

**Définition 14 (Matrices équivalentes).**

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ .

On dit que  $A$  est équivalente à  $B$  ssi il existe  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  et  $Q \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$  telles que  $B = PAQ$ .

La relation ainsi définie est une relation d'équivalence sur  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ .

**Propriété 20 (Caractérisation d'une matrice de rang  $r$ ).**

Soit  $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ .

$A$  est de rang  $r$  ssi  $A$  est équivalente à  $J_r$ .

Ainsi deux matrices équivalentes de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  ont le même rang, et la réciproque est vraie.

**Propriété 21 (Invariance du rang par transposition).**

Soit  $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ .

$$\text{rg}(A) = \text{rg}({}^t A) = \text{rg}(\underbrace{L_1, \dots, L_n}_{\text{vecteurs lignes de } M}).$$

► Exemple : Déterminer le rang de  $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ .

**Propriété 22 (Rang d'une matrice extraite).**

— Si  $A$  est une matrice extraite de  $B$  alors  $\text{rg}(A) \leq \text{rg}(B)$ .

— Le rang de  $A$  est la taille maximale des sous-matrices carrées inversibles que l'on peut extraire de  $A$ .

**Remarque 5.** Le rang d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  est égal

- au rang de la famille de ses colonnes
- au rang de la famille de ses lignes
- au rang de l'application linéaire qu'elle représente dans une base donnée (en particulier l'application canoniquement associée à  $A$ )
- au rang de toute famille de vecteurs représentée par  $A$  dans une base donnée
- au nombre de pivots de  $A$  en l'échelonnant en lignes

**Méthode pour savoir si une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est inversible :**

1. l'application linéaire canoniquement associée à  $A$  est bijective,
2.  $AX = 0 \Rightarrow X = 0$ , cad le système  $AX = 0$  admet comme unique solution le vecteur nul,
3.  $\text{Ker} A = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\}$ ,
4.  $\text{Im} A = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ,
5.  $AX = Y$  a une unique solution,
6. c'est une matrice de passage,
7.  $\text{rg}(A) = n$ ,
8. les vecteurs colonnes de  $A$  forment une base de  $\mathbb{K}^n$ ,
9. les vecteurs lignes de  $A$  forment une base de  $\mathbb{K}^n$ .