

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la notation. L'exercice et les trois problèmes sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice : Constante d'Euler-Mascheroni (≈ 8 points)

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Quelle est la nature de $\sum \frac{1}{n(n-1)}$? On justifiera la réponse.
2. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $\frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n-1}$.
3. En déduire que la série de terme général $\sum \left(\int_{n-1}^n \frac{dt}{t} - \frac{1}{n} \right)$ converge. On notera ℓ sa somme.
4. Pour $n \geq 2$, on note S_n la somme partielle d'ordre n de cette série. Ecrire S_n en fonction de n et de H_n .
5. Déduire des deux questions précédentes qu'il existe un réel γ , que l'on exprimera en fonction de ℓ , tel que pour tout $n \geq 1$,

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1)$$

Cette constante est appelée constante d'Euler-Mascheroni. Euler en calcula 16 décimales en 1781 et Mascheroni 19 en 1790.

Problème 1 : Vers les intégrales impropres ! (≈ 20 points)

A. Résolution d'équations différentielles

1. Résoudre l'équation différentielle : $z' + z\operatorname{th}(t) = 0$, où z est une fonction de la variable t à valeurs réelles.
Trouver la solution z_1 de cette équation telle que $z_1(0) = 1$.
2. Résoudre l'équation différentielle : $z' + z\operatorname{th}(t) = t\operatorname{th}(t)$.
Trouver la solution z_2 de cette équation telle que $z_2(0) = 0$.

B. Etude d'intégrales

Soient un réel x et k un entier strictement positif. On pose $I_k(x) = \int_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch}^k t}$.

1. Calculer $I_1(x)$ (on pourra faire le changement de variable $u = e^t$).
2. Calculer $I_2(x)$.
3. En intégrant par parties, trouver une relation entre I_{k+2} et I_k (on pourra remarquer que $\frac{1}{\operatorname{ch}^k t} = \frac{\operatorname{cht}}{\operatorname{ch}^{k+1} t}$).
4. Démontrer que la fonction $I_k : x \mapsto I_k(x)$ est :
 - (a) impaire.
 - (b) continue sur $\mathbb{R}$.
 - (c) de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
5. Calculer I'_k , I''_k et I'''_k .
6. Donner un développement limité de I_k à l'ordre 3 au voisinage de 0. On pourra par exemple appliquer la formule de Taylor-Young.
7. Démontrer que la fonction I_k est monotone sur $\mathbb{R}$.
8. On pose, sous réserve d'existence, $J_k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch}^k t}$, notée $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch}^k t}$.
 - (a) Démontrer l'existence de J_k . On pourra pour utiliser sans le démontrer que pour tout réel t , $\frac{1}{\operatorname{cht}} \leq 2e^{-t}$.
 - (b) Calculer J_1 , J_2 puis J_k pour tout $k > 2$.

Problème 2 : Endomorphismes en dimension finie (≈ 20 points)

A. Endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On définit l'application f sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$f : M \mapsto M \times A - A \times M.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Soit $K = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), A \times M = M \times A\}$. Montrer que K est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.
3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Calculer $f(M)$.
4. Montrer que $\text{Ker } f$ est le sous-espace vectoriel engendré par I_2 et A . En déduire une base de $\text{Ker } f$ puis préciser la dimension de $\text{Ker } f$ ainsi que le rang de f .
5. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
6. Soit N un élément de $\text{Ker } f$. Déterminer N^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

B. Endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$

Soit f l'application qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$, associe $f(P)$ défini par :

$$f(P) = (1 + X^2)P'' - 2XP',$$

où P' et P'' désignent les dérivées première et seconde de P .

1. Déterminer $f(P)$ lorsque $P = 1$, lorsque $P = X$, lorsque $P = X^2$ et lorsque $P = X^3$.
2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Déterminer une base de $\text{Im } f$.
4. Déterminer une base de $\text{Ker } f$. On pourra utiliser les questions 1 et 3.
5. Soit $\mathcal{C}$ la famille obtenue en concaténant une base de $\text{Im } f$ et une base de $\text{Ker } f$. Montrer que cette famille est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
6. On note $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X], / f(P) = -2P\}$. Montrer que G est un sous-espace de $\mathbb{R}_3[X]$. Donner une base de G .
7. Soit (x, y, z, t) les coordonnées d'un vecteur P de $\mathbb{R}_3[X]$ dans la base $\mathcal{C}$. Déduire de la question précédente les coordonnées de $f(P)$ dans la base $\mathcal{C}$.

Problème 3 : Etude d'endomorphismes solutions d'une équation (≈ 20 points)

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. L'objet de cet exercice est l'étude des endomorphismes f de E vérifiant :

$$f^2 = f + 2Id_E(*),$$

où Id_E désigne la fonction identité de E et f^2 désigne la composée $f \circ f$.

A. Étude d'un cas particulier

Dans cette partie uniquement on se place dans $E = \mathbb{R}^4$. Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}^4$ par :

$$\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \varphi(x, y, z, t) = (2x - z + t, -2x + z - t, -y + t, -2x - y + z).$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une base de $\text{Ker}(\varphi)$, ainsi qu'une base de $\text{Im}(\varphi)$.
3. Exprimer φ^2 de fonction de φ . Que peut-on en déduire pour φ ?
4. On pose $F = 3\varphi - Id_E$. Montrer que F vérifie (*).

B. Étude du cas général

E est à nouveau un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel quelconque.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2 = f + 2Id_E$. On définit alors les applications $g = f - 2Id_E$ et $h = f + Id_E$.

1. Justifier que g et h sont des endomorphismes de E .
2. Soient u et v deux endomorphismes de E tels que $u \circ v = 0$, montrer que $\text{Im}(v) \subset \text{Ker}(u)$.
3. Calculer $g \circ h$ et $h \circ g$: que peut-on en déduire ?
4. Montrer que $\text{Ker}(g)$ et $\text{Ker}(h)$ sont en somme directe.
5. (a) Montrer que $Id_E \in \text{Vect}(g, h)$.
(b) En déduire que $E = \text{Ker}(g) \oplus \text{Ker}(h)$.
6. Soit p la projection sur $\text{Ker}(g)$ parallèlement à $\text{Ker}(h)$. Soit q la projection sur $\text{Ker}(h)$ parallèlement à $\text{Ker}(g)$.
(a) Montrer que $p + q = Id_E$, en déduire $p \circ q$ et $q \circ p$.
(b) Montrer que $h = 3p$ et $g = -3q$.
(c) En déduire l'expression de f en tant que combinaison linéaire de p et q .