TD 26 : Matrices et applications linéaires

▶ Exercice 1 : Dans E, espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, on considère les deux bases définies par :
$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{B}' = (e_1 + e_2 + 2e_3, e_1 + e_3, -e_1 - e_2 - 3e_3)$.
Si $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, déterminer $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$ sachant que $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ -2 & -9 & 4 \end{pmatrix}$.

▶ Exercice 2 : Dans E, espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3 rapporté à $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, on considère φ de matrice $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} a-b & a+c & c-b \\ b-a & c-a & b+c \\ a+b & a-c & b-c \end{pmatrix}$. Soit la base $\mathcal{B}' = (e_1 + e_2 - e_3, e_1 - e_2 + e_3, -e_1 + e_2 + e_3)$. Déterminer la matrice $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$.

▶ Exercice 3 : Dans $\mathbb{C}^3$, espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ rapporté à $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, on suppose :
$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} -2i & -2i & 1 \\ 2(1+i) & 1+2i & -1+i \\ 1+2i & 1+i & -1 \end{pmatrix}$
On pose de plus $\mathcal{B}' = (e_1 - e_2, -ie_2 + e_3, e_1 - e_2 + ie_3)$.

1. Vérifier que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{C}^3$.
2. Ecrire les matrices de passage $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ et $(P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'})^{-1}$.
3. Déterminer la matrice de φ par rapport à $\mathcal{B}'$ notée $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$.
4. Montrer que φ est un automorphisme et déterminer φ^{-1}, puis $(\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)^{-1})$.
5. Calculer $(\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi))^2$. Que peut-on en conclure pour φ^2 et $(\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi))^3$?

▶ Exercice 4 : Dans $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique, soient les deux sous-espaces vectoriels :
$\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y + 3z = 0\}$ et $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x = 3y = 6z\}$.
Vérifier que Π et D sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ puis déterminer la matrice de la projection sur D parallèlement à Π relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

▶ Exercice 5 : On rapporte $E = \mathbb{R}^3$ à sa base canonique $\mathcal{B}$. Soient la droite $D = \mathrm{Vect}(1; 2; 1)$ et le plan $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - 2y + 5z = 0\}$.

1. Montrer que Π et D sont supplémentaires dans E.
2. Ecrire la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de E de la projection vectorielle p sur Π paralllèlement à D.
3. Ecrire la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de E de la symétrie vectorielle par rapport à Π parallèlement à D, de la projection vectorielle sur D parallèlement à Π et de la symétrie vectorielle par rapport à D parallèlement à Π.

▶ Exercice 6 : Soient $f : \left\{ \begin{array}{l} x' = 3x - 4y - 2z \\ y' = 4x - 7y - 4z \\ z' = -5x + 10y + 6z \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{l} x' = 5x - 8y - 4z \\ y' = 8x - 15y - 8z \\ z' = -10x + 20y + 11z \end{array} \right.$ deux endomorphiqmes de $\mathbb{R}^3$.
Montrer que f est une projection et que g est une symétrie.

▶ Exercice 7 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\varphi \ : \ \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \ M \mapsto AM - MA$.

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$. Quelle est sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?
2. Déterminer une base de kerφ et de Imφ.

▶ Exercice 8 : Dans tout l'exercice, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soit Φ l'endomorphisme canoniquement associé à A. Montrer qu'il est bijectif. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
2. Soit Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ qui à $P \in \mathbb{R}_2[X]$ associe $\Delta(P) = P + P'$. On rapporte $\mathbb{R}_2[X]$ à sa base canonique. Reonnaître la matrice de Δ dans cette base. En déduire que Δ est un automorphisme et résoudre $\Delta(P) = 1 + X + 2X^2$.
3. Soit E_2 l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme $f \ : \ x \mapsto e^x P(x)$, avec $P \in \mathbb{R}_2[X]$, et D l'application dérivation de E_2. Donner une base très simple de E_2. Reconnaître la matrice de D dans cette base. Résoudre $D(f) = (x \mapsto x^2 e^x)$.
4. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ par la méthode la plus simple possible. Vérifier que la formule obtenue reste valable pour $n \in \mathbb{Z}$.

▶ Exercice 9 : Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. On note d l'application dérivation sur E. Pour a et b dans $\mathbb{R}$, b non nul, on définit les applications u et v sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = e^{ax}\cos(bx)$ et $v(x) = e^{ax}\sin(bx)$.

1. Montrer que u et v sont linéairement indépendantes. On note F le sous-espace engendré par u et v.
2. Montrer que d et $d + 2\text{id}$ induisent chacune un endomorphisme de F. Donner leur matrice relativement à la base $\mathcal{B} = (u, v)$. En déduire que ce sont des automorphismes de F.
3. **Application 1** Dériver trois fois $y \ : \ x \mapsto e^{5x}\cos(2x) + 3e^{5x}\sin(2x)$.
4. **Application 2** Résoudre $y'' + 4y' + 4y = e^{3x}\cos x - 2e^{3x}\sin x$.

▶ Exercice 10 : Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+\alpha \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & \alpha & 3 \\ -4 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Discuter selon α le rang de ces matrices.

▶ Exercice 11 : Déterminer le rang r de la famille de vecteurs de $\mathbb{R}_3[X]$:
$\mathcal{F} = \big(1 - X - 2X^2 + X^3, -1 + X, 1 - X - 2X^2 + 3X^3, 2 - 2X - X^2, 1 - X + X^3\big)$.

▶ Exercice 12 : Soit f l'application linéaire canoniquement associé à la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer une base de ker$f$ et une base de Imf.

Reprendre la question précédente avec $M = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.