

Ex 7 TD 24

$$F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n\}$$

on voit F sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (déjà vu TD 21)

Soit $u \in F$ alors u est une suite réc. lin. ordre 2

$$EC: \quad x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } 1$$

$$u \in F \text{ssi } \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2 \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = A(2)^n + B(1)^n = A2^n + B$$

Ainsi $F = \text{Vect}(v, w)$ où $(v_n) = (2^n)$ et $(w_n) = (1)$

Donc (v, w) est une famille génératrice de F .

Maq: (v, w) est une famille libre de F sur $\mathbb{R}$

$$\text{Soit } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \alpha v + \beta w = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$$

$$\text{alors } \forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha v_n + \beta w_n = 0$$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha 2^n + \beta \times 1 = 0$$

$$\text{si } n=0 \text{ alors } \alpha 2^0 + \beta = \alpha + \beta = 0$$

$$\text{si } n=1 \text{ alors } \alpha 2^1 + \beta = 2\alpha + \beta = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Donc (v, w) est une famille libre de F sur $\mathbb{R}$

Donc (v, w) est une base de F

Donc $\dim F = 2$