Ex 15 TD 24

① La composée de 2 endomorphismes est un endomorphisme donc $\phi\circ\psi$ et $\psi\circ\phi$ sont des éléments de $\mathcal{L}(E)$.

$(\phi\circ\psi)\circ(\phi\circ\psi) = (\phi\circ\psi\circ\phi)\circ\psi = \phi\circ\psi$

$(\psi\circ\phi)\circ(\psi\circ\phi) = (\psi\circ\phi\circ\psi)\circ\phi = \psi\circ\phi$

donc $\phi\circ\psi$ et $\psi\circ\phi$ sont des projecteurs

② On sait déjà que $\mathrm{Im}(\phi\circ\psi) \subset \mathrm{Im}(\phi)$

Mq $\mathrm{Im}(\phi) \subset \mathrm{Im}(\phi\circ\psi)$

Soit $y \in \mathrm{Im}\,\phi$ alors $\exists x \in E$ tq $y = \phi(x)$

$y = \phi\circ\psi\circ\phi(x) = \phi\circ\psi(\underbrace{\phi(x)}_{\in E \text{ car } \phi \in \mathcal{L}(E)})$ donc $y \in \mathrm{Im}(\phi\circ\psi)$

Par symétrie, on peut affirmer que $\mathrm{Im}\,\psi = \mathrm{Im}(\psi\circ\phi)$

(ψ et ϕ ont des rôles tout à fait symétriques).

③ On sait que $\mathrm{Ker}\,\phi \subset \mathrm{Ker}(\psi\circ\phi)$

donc $\dim(\mathrm{Ker}\,\phi) \leq \underline{\dim(\mathrm{Ker}(\psi\circ\phi))}$ (□)

Appliquons le th du rang à ϕ puis à $\psi\circ\phi$ puisque E est de dimension finie n :

$\dim(\mathrm{Ker}\,\phi) + \dim(\mathrm{Im}\,\phi) = n$ (*)

$\dim(\mathrm{Ker}(\psi\circ\phi)) + \dim(\mathrm{Im}(\psi\circ\phi)) = n$

or $\dim(\mathrm{Im}(\psi\circ\phi)) = \dim(\mathrm{Im}\,\psi)$

Donc $\dim(\mathrm{Ker}(\psi\circ\phi)) + \dim(\mathrm{Im}\,\psi) = n$ (Δ)

On a donc par (*) et (Δ), en identifiant n dans les 2 expressions

$\dim \mathrm{Ker}\,\phi + \dim \mathrm{Im}\,\phi = \underline{\dim \mathrm{Ker}(\psi\circ\phi)} + \dim \mathrm{Im}(\psi)$

D'après (□) $\dim \mathrm{Ker}\,\phi + \dim \mathrm{Im}\,\phi \geq \dim(\mathrm{Ker}\,\phi) + \dim \mathrm{Im}\,\psi$

Donc $\mathrm{rg}\,\phi \geq \mathrm{rg}\,\psi$

Par symétrie on obtient également $\mathrm{rg}\,\psi \geq \mathrm{rg}\,\phi$

<u>Concl:</u> $\mathrm{rg}\,\phi = \mathrm{rg}\,\psi$.

Ex 18 TD 24

① Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tq $\alpha u + \beta \phi(u) = 0_E$ $(*)$

alors $\phi(\alpha u + \beta \phi(u)) = \phi(0_E)$

donc $\alpha \phi(u) + \beta \phi^2(u) = 0_E$ car ϕ linéaire

donc $\alpha \phi(u) + \beta(-id_E)(u) = 0_E$ car $\phi^2 = -id_E$

donc $\alpha \phi(u) - \beta u = 0_E$ $(\square)$

On multiplie $(*)$ par β, on obtient $\alpha \beta u + \beta^2 \phi(u) = 0_E$

$(\square)$ par α, on obtient $\alpha^2 \phi(u) - \alpha \beta u = 0_E$

on ajoute ces 2 lignes, on obtient $(\alpha^2 + \beta^2) \phi(u) = 0_E$

or $\phi(u) \neq 0_E$. En effet, si $\phi(u) = 0_E$ alors $\phi^2(u) = \phi(0_E)$

donc $-id_E(u) = 0_E$ donc $-u = 0_E$ donc $u = 0_E$ or $u \neq 0_E$

donc $\alpha^2 + \beta^2 = 0_{\mathbb{R}}$ donc $\alpha^2 = \beta^2 = 0_{\mathbb{R}}$ donc $\alpha = \beta = 0_{\mathbb{R}}$

② Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tq $\alpha u + \beta \phi(u) + \gamma w + \delta \phi(w) = 0_E$ $(*)$

alors $\phi(\alpha u + \beta \phi(u) + \gamma w + \delta \phi(w)) = \phi(0_E)$

donc $\alpha \phi(u) + \beta \phi^2(u) + \gamma \phi(w) + \delta \phi^2(w) = 0_E$

donc $\alpha \phi(u) - \beta u + \gamma \phi(w) - \delta w = 0_E$ $(\square)$

On multiplie $(*)$ par γ et $(\square)$ par δ dans le but de faire disparaître $\phi(w)$.

$\alpha \gamma u + \beta \gamma \phi(u) + \gamma^2 w + \delta \gamma \phi(w) = 0_E$ et

$\delta \alpha \phi(u) - \beta \delta u + \delta \gamma \phi(u) - \delta^2 w = 0_E$

On soustrait les deux lignes :

$(\alpha \gamma - \cancel{\beta}\delta) u + (\beta \gamma - \delta \alpha) \phi(u) + (\gamma^2 + \delta^2) w = 0_E$

or $(u, \phi(u), w)$ libre donc en particulier $\gamma^2 + \delta^2 = 0$

donc $\gamma = \delta = 0$. $(*)$ devient donc :

$\alpha u + \beta \phi(u) = 0_E$ or $(u, \phi(u))$ libre (d'après ①)

donc $\alpha = \beta = 0$.

③ Soit $X = (x, y, z, t)_\beta$

alors $X = x u + y \phi(u) + z w + t \phi(w)$

$\phi(X) = x \phi(u) + y \phi^2(u) + z \phi(w) + t \phi^2(w)$

$= x \phi(u) - y u + z \phi(w) - t w$

$= -y u + x \phi(u) - t w + z \phi(w)$

donc $\phi(X) = (-y, x, -t, z)_\beta$