

TD25

Ex1 R6to 69

- (1)  $v_n \sim \frac{4^n}{5^n}$   $\sum v_n$  CV par téor d'eq pos car  $\sum \left(\frac{4}{5}\right)^n$  série géo CV ( $0 < \frac{4}{5} < 1$ )
- (2)  $n^2 \alpha_n \rightarrow 0$  donc  $\alpha_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  donc  $\alpha_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  et donc  $\sum \frac{1}{n^2}$  CV donc  $\sum \alpha_n$  CV

- (3) CSSA  $\sum a_n$  CV

- (4)  $\forall n \in \mathbb{N} \quad |b_n| = \frac{n}{n^3+n+1} \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$  et  $\sum \frac{1}{n^2}$  CV donc par ACSTP,  $\sum |b_n|$  CV donc  $\sum b_n$  CVA donc  $\sum b_n$  CV

- (5) Pas de CVA car  $\sum \frac{1}{n^{2/3}}$  DV, Pas de CSSA car  $\left(\frac{1}{n^{2/3} + \cos n}\right)$  pas décroissant
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n^{2/3}} \times \frac{1}{1 + \frac{\cos n}{n^{2/3}}} = \frac{(-1)^n}{n^{2/3}} \times \left(1 - \frac{\cos n}{n^{2/3}} + o\left(\frac{\cos n}{n^{2/3}}\right)\right)$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n^{2/3}} + \underbrace{\frac{(-1)^{n+1} \cos n}{n^{4/3}}}_{v_n} + o\left(\frac{\cos n}{n^{4/3}}\right)$$

$\sum \frac{(-1)^n}{n^{2/3}}$  CV par CSSA,  $v_n$  qui n'est pas de signe const

et  $|v_n| = O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)$  donc  $\sum v_n$  CVA donc  $\sum v_n$  CV

donc par téor  $\sum u_n$  CV

- (6)  $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}, \quad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\right)$

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - v_n$$

où  $v_n$  est de signe const.

$v_n \sim \frac{1}{n}$  et  $\sum \frac{1}{n}$  DV donc par eq pos  $\sum v_n$  DV

et  $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  CV donc par Abaco  $\sum u_n$  DV.