Exercice 1

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. On note d l'application dérivation sur E. Pour a et b dans $\mathbb{R}$, b non nul, on définit les applications u et v sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = e^{ax}\cos(bx)$ et $v(x) = e^{ax}\sin(bx)$.

1. Montrer que u et v sont linéairement indépendantes. On note F le sous-espace engendré par u et v.
2. Montrer que d et $d + 2\mathrm{id}$ induisent chacun un endomorphisme de F. Donner leur matrice relativement à la base $\mathcal{B} = (u, v)$. En déduire que ce sont des automorphismes de F.
3. **Application 1** Dériver trois fois $y \ : \ x \mapsto e^{5x}\cos(2x) + 3e^{5x}\sin(2x)$.
4. **Application 2** Résoudre $y'' + 4y' + 4y = e^{3x}\cos x - 2e^{3x}\sin x$.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soit Φ l'endomorphisme canoniquement associé à A. Montrer qu'il est bijectif. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
2. Soit Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ qui à $P \in \mathbb{R}_2[X]$ associe $\Delta(P) = P + P'$. On rapporte $\mathbb{R}_2[X]$ à sa base canonique. Reonnaître la matrice de Δ dans cette base. En déduire que Δ est un automorphisme et résoudre $\Delta(P) = 1 + X + 2X^2$.
3. Soit E_2 l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme $f \ : \ x \mapsto e^x P(x)$, avec $P \in \mathbb{R}_2[X]$, et D l'application dérivation de E_2. Donner une base très simple de E_2. Reconnaître la matrice de D dans cette base. Résoudre $D(f) = (x \mapsto x^2 e^x)$.
4. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ par la méthode la plus simple possible. Vérifier que la formule obtenue reste valable pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3

Soit $a \in]0, 1[$, on définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2$$

1. Montrer que la suite (u_n) est monotone, convergente et déterminer sa limite.
2. Montrer que la série $\sum u_n^2$ est convergente et déterminer sa somme en fonction de a.
3. Montrer que la série $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.
4. Etudier la nature de la série $\sum u_n$.