

TD25 cor

Ex Réfco 76 c.à.d. ex 8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$

- si $\alpha \leq 0$, $u_n \not\rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ donc $\sum u_n$ DVG
- si $\alpha > 0$, par le CSA connue $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n \geq 1}$ est décroissante et CV vers 0, on conclut que $\sum u_n$ CV en tant que série alternée
- De plus, $\sum u_n$ CVA ssi $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ CV ssi $\alpha > 1$.

Ex Réfco 78 c.à.d. ex 9

Poseons $\forall n \geq 2$, $v_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$. Alors $\forall n \geq 2$, $v_n = \frac{(-1)^n}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{n}}$

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$ (x). Comme $\frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, on a :

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n} \left(1 - \frac{(-1)^n}{n} + o\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) \right) = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n} + w_n \text{ avec } w_n = -\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$\sum \frac{1}{n^2}$ CV donc par la règle de domination $\sum w_n$ CVA donc CV
De plus $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ CV en tant que série alternée par le CSA.

Donc $\sum v_n$ CV comme somme de deux séries convergentes.