

Ex 11 Ref 83 TD 25

$$\sum \frac{1}{n^2 \ln n}$$

$$\forall n \geq 3 \quad \ln n \geq 1$$

$$\forall n \geq 3 \quad n^2 \ln n \geq n^2$$

$$\forall n \geq 3 \quad 0 \leq \frac{1}{n^2 \ln n} \leq \frac{1}{n^2} \text{ et on conclut à la convergence}$$

$$\text{de } \sum \frac{1}{n^2 \ln n} \text{ par TCSTP}$$

$$\sum \frac{\ln n}{n}$$

$$\forall n \geq 3 \quad \frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n} \text{ et on conclut à la divergence de}$$

$$\sum \frac{\ln n}{n} \text{ par TCSTP}$$

$$\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

$f: t \mapsto \frac{1}{t(\ln t)^2}$ est décroissante et positive sur $[2, +\infty[$. Soit $n \geq 2$

$$\text{On a : } f(p+1) \leq \int_p^{p+1} f(t) dt \leq f(p) \text{ pour tout } p \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

$$= \sum_{p=2}^n f(p+1) \leq \int_2^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{p=2}^n f(p)$$

Soit (S_n) la
SSP associée
à la série.

(S_n) est
croissante
car la
série est
à termes
positifs

$$\text{or } S_n = \sum_{p=2}^n f(p) = f(2) + \dots + f(n) = f(2) + \sum_{p=2}^n f(p+1) = f(n+1)$$

$$\text{donc } S_n \leq \frac{1}{2(\ln 2)^2} + \int_2^{n+1} f(t) dt - \frac{1}{(n+1)(\ln(n+1))^2} \leq \frac{1}{2(\ln 2)^2} + \int_2^{n+1} f(t) dt$$

Pour calculer $\int_2^{n+1} f(t) dt$ on fait le changement de variable
 $u = \ln t$ car $t \mapsto \ln t$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement croissant sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\int_2^{n+1} f(t) dt = \int_{\ln 2}^{\ln(n+1)} \frac{du}{u^2} = \left[-\frac{1}{u} \right]_{\ln 2}^{\ln(n+1)} = -\frac{1}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln 2} \leq \frac{1}{\ln 2}$$

Donc (S_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{2(\ln 2)^2} + \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow (S_n) \text{ CV} \Rightarrow \sum \frac{1}{n(\ln n)^2} \text{ CV}$

$$\sum \frac{\ln n}{n^2}$$

$$\text{Soit } u_n = \frac{\ln n}{n^2}. \text{ Soit } d = \frac{3}{2}. \quad n^{\frac{3}{2}} u_n \rightarrow 0$$

$$\text{donc } \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0, \quad n^{\frac{3}{2}} u_n < 1$$

$$\text{donc } u_n < \frac{1}{n^{3/2}} \text{ et on conclut à la CV de}$$

$$\sum \frac{\ln n}{n^2} \text{ par TCSTP.}$$

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n} \ln n}$$

$$\frac{n}{\sqrt{n} \ln n} \rightarrow +\infty \text{ donc } \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_0, \frac{n}{\sqrt{n} \ln n} > \frac{1}{\epsilon}$$

$$\text{donc il existe } n_0 \text{ tq } \forall n \geq n_0, \frac{1}{\sqrt{n} \ln n} > \frac{1}{n}$$

$$\text{dv de } \sum \frac{1}{\sqrt{n} \ln n} \text{ par TCSTP}$$

$$\text{on peut dire que } \frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n} \ln n}\right)$$

$$\sum \frac{1}{n \ln(n)}$$

$$f: t \mapsto \frac{1}{t \ln t} \text{ est pas décroissante sur } [2, +\infty[$$

$$\sum f(n) \text{ CVssi } \int_2^{+\infty} f(t) dt \text{ CV}$$

$$\text{Soit } x \in [2, +\infty[$$

$$\int_2^x f(t) dt = \left[\ln(\ln t) \right]_2^x = \ln(\ln x) - \ln(\ln 2)$$

$$\text{donc } \sum \frac{1}{n \ln n} \text{ DV}$$