

TD26 ex 12 1) Déterminer $\text{Ker } M$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. $X \in \text{Ker } M$ ssi $MX = 0_{3,1}$

$$\text{ssi } \begin{cases} x+y+z=0 \\ -x+2y-2z=0 \\ 3y-z=0 \end{cases}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \quad \text{ssi } \begin{cases} x+4y=0 \\ -x+2y-2z=0 \\ 3y-z=0 \end{cases}$$

$$\text{ssi } \begin{cases} x=-4y \\ z=3y \\ 4y+2y-6y=0 \end{cases}$$

$$\text{ssi } \begin{cases} x=-4y \\ z=3y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{ssi } X = y \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}$$

donc $\text{Ker } M = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ et comme $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \neq 0_{3,1}$, $\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\text{Ker } M$ et $\dim \text{Ker } M = 1$ (droite vectorielle). Par le th du rang, $\dim \text{Ker } M + \text{rg}(M) = 3$ donc $\text{rg}(M) = \dim(\text{Im } M) = 3 - 1 = 2$

or $\text{Im}(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ donc $\dim \text{Im}(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ car $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont non col donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ est libre et a 2 élt qui appartiennent à $\text{Im}(M)$ donc c'est une base de $\text{Im}(M)$.

On revient à $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$:

$$\text{Ker } f = \text{Vect}((-4, 1, 3)) \quad \text{et} \quad \text{Im}(f) = \text{Vect}((1, -1, 0), (1, 2, 3))$$

2) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. $X \in \text{Ker } M$ ssi $MX = 0_{3,1}$

$$\text{ssi } \begin{cases} -11z+7y+3t=0 \\ y+11z+2t=0 \\ x+7z+t=0 \end{cases}$$

$$\text{ssi } \begin{cases} x=-7z-t \\ y=-11z-2t \\ -11x+7y+3t=0 \end{cases}$$

$$\text{ssi } \begin{cases} x=-7z-t \\ y=-11z-2t \\ 77z+11t-77z-14t+3t=0 \end{cases}$$

$$\text{ssi } \begin{cases} x=-7z-t \\ y=-11z-2t \\ z \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{ssi } X = z \begin{pmatrix} -7 \\ -11 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\text{Ker } M = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -7 \\ -11 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et les 2 vecteurs sont non col donc la famille qui est générée de $\text{Ker } M$ est aussi libre $\Rightarrow$ c'est une base de $\text{Ker } M$ et $\dim(\text{Ker } M) = 2$. Par le th du rang, $\dim \text{Ker } M + \text{rg } M = 4$ donc

$\dim(\text{Im}(M)) = 4 - 2 = 2$. Or $\text{Im}(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ $\begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont 2 élt de $\text{Im}(M)$ non col donc $\left(\begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre de $\text{Im}(M)$ de cardinal 2 $\Rightarrow$ c'est une base de $\text{Im}(M)$ et $\text{Im}(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. On revient à f :

$$\text{Ker } f = \text{Vect}((-7, -11, 1, 0), (-1, -2, 0, 1)) \quad \text{et} \quad \text{Im } f = \text{Vect}((-11, 0, 1), (7, 1, 0))$$

TD26 ex 11

Soit $B_c = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$

$\text{rg } \tilde{f} = \text{rg}(\text{mat}_{B_c}(\tilde{f}))$. Puis $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4$ donc $\text{rg}(\tilde{f}) \leq 4$

$$\text{or } \text{mat}_{B_c}(\tilde{f}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \sim \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \sim \\ L_2 \leftrightarrow L_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \sim \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

or $\text{rg}(A) = 3$ donc $\text{rg}(\text{mat}_{B_c}(\tilde{f})) = \text{rg}(A) = 3$ et $\text{rg}(\tilde{f}) = 3$.

Ex 10 TD 26 1) soit $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1+\alpha & 1 & 1 \\ 0 & -\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
 $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$
 $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1+\alpha & 1 & 1 \\ 0 & -\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1+\alpha & 1 & 1 \\ 0 & -\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + (-1)L_2$
 $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$

• si $\alpha = 0$ alors $\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$ (car $\text{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4) = \text{Vect}(C_1)$).

• si $\alpha \neq 0$ alors $\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1+\alpha & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$

$L_2 \leftarrow L_2 / \alpha$
 $L_3 \leftarrow L_3 / \alpha$
 $L_4 \leftarrow L_4 / \alpha$

↑
matrice triangulaire dont
les coeff diagonaux sont non
nuls $\Rightarrow$ matrice inversible
 $\Rightarrow$ matrice de rang 4

2) $\text{rg}(B) = \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & \alpha & 3 \\ -4 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & \alpha & 3 \\ -4 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$
 $L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1$

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 / 4} \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + 6L_1$
 $L_4 \leftarrow L_4 + 9L_1$

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & \alpha & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - \alpha L_3} \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 - \frac{\alpha}{4} \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftrightarrow L_4$

- si $-5 - \frac{\alpha}{4} \neq 0$ alors $\text{rg}(B) = 4$ (matrice triangulaire dont les coeff diagonaux sont non nuls $\Rightarrow$ matrice inversible)

- si $-5 - \frac{\alpha}{4} = 0$ ssi $-5 = -\frac{\alpha}{4}$ ssi $\alpha = -20$ alors

$$\text{rg}(B) = \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 \text{ car } \text{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4) = \text{Vect}(C_1, C_2, C_3)$$

puisque C_4 est cl de C_2 et C_3

(ou (autre explication)

3 pivots non nuls
dans la matrice
échelonnée

(ou (autre explication)

car $\text{Vect}(L_1, L_2, L_3) = \text{Vect}(L_1, L_2, L_3, L_4)$
car $L_4 = 0$. Il y a plus (L_1, L_2, L_3)
est libre (position des zéros)

Ex 2 TD 26

$$P_{B,B'} = \text{mat}_B(B') = \begin{pmatrix} e'_1 & e'_2 & e'_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

Déterminons l'inverse de $P_{B,B'}$: c'est $P_{B',B}$

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 - e_3 \\ e'_2 = e_1 - e_2 + e_3 \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases} \text{ssi} \begin{cases} e'_1 + e'_2 = 2e_1 & (L_1 \leftarrow L_1 + L_2) \\ e'_2 + e'_3 = 2e_3 & (L_2 \leftarrow L_2 + L_3) \\ e'_1 + e'_3 = 2e_2 & (L_3 \leftarrow L_1 + L_3) \end{cases}$$

$$\text{ssi} \begin{cases} e_1 = \frac{1}{2} e'_1 + \frac{1}{2} e'_2 \\ e_2 = \frac{1}{2} e'_1 + \frac{1}{2} e'_3 \\ e_3 = \frac{1}{2} e'_2 + \frac{1}{2} e'_3 \end{cases}$$

$$\text{donc } P = \text{mat}_{B'}(B) = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{matrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Par la formule de changement de base on a :

$$\text{mat}_{B'}(\varphi) = P_{B,B'}^{-1} \times \text{mat}_B(\varphi) \times P_{B,B'}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-b & a+c & c-b \\ b-a & c-a & b+c \\ a+b & a-c & b-c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2c & 2c \\ 2a & 2a & 0 \\ 2b & 0 & 2b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4c \\ 4a & 0 & 0 \\ 0 & 4b & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{mat}_{B'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2c \\ 2a & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 0 \end{pmatrix}}$$

Ex 1 TD 26

$$P_{B,B'} = \text{mat}_B(B') = \begin{pmatrix} e'_1 & e'_2 & e'_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

Déterminons l'inverse de $P_{B,B'}$: c'est $P_{B',B}$.

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + 2e_3 \\ e'_2 = e_1 + e_3 \\ e'_3 = -e_1 - e_2 - 3e_3 \end{cases} \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} e_1 + e_3 = -e_3 \quad (\text{obtenu en faisant } L_1 \leftarrow L_1 + L_2) \\ e_1 = e'_2 - e_3 = e'_2 + e'_1 + e'_3 \quad (\text{obtenu en remplaçant } e_3 \text{ par } -e'_1 - e'_3 \text{ dans } L_2) \\ e_2 = -e_1 - 3e_3 - e'_3 \end{cases}$$

$$\text{ssi} \quad \begin{cases} e_3 = -e'_1 - e'_3 \\ e_1 = e'_1 + e'_2 + e'_3 \\ e_2 = -e'_1 - e'_2 - e'_3 + 3e'_1 + 3e'_3 - e'_3 \end{cases}$$

$$\text{ssi} \quad \begin{cases} e_1 = e'_1 + e'_2 + e'_3 \\ e_2 = 2e'_1 - e'_2 + e'_3 \\ e_3 = -e'_1 - e'_3 \end{cases}$$

$$\text{donc } P_{B',B} = \text{mat}_{B'}(B) = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{matrix} = P_{B,B'}^{-1}$$

Par la formule de changement de base on a:

$$\text{mat}_{B'}(\varphi) = P_{B,B'}^{-1} \times \text{mat}_B(\varphi) \times P_{B,B'}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ -2 & -9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \boxed{\text{mat}_{B'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$