TD 27 - Dénombrement

1 Formaliser le résultat d'une expérience

Combinaisons. Listes avec / sans répétition. Permutations. Propriétés du cardinal d'un ensemble fini. Raisonnement par choix successifs.

Exercice R 1. Dans chaque cas, expliquer comment on peut formaliser un résultat de l'expérience **de manière à ce que les résultats soient équiprobables** et en déduire le nombre de résultats différents possibles.

1. On pioche 8 cartes dans un jeu de 32 cartes.
2. Lors d'une course à pied comprenant 380 participants numérotés de 1 à 380, on s'intéresse aux numéros des trois plus rapides rangés dans l'ordre d'arrivée .
3. On tire successivement 4 boules dans une urne qui contient 8 boules bleues et 5 boules rouges.
4. On tire simultanément 3 boules dans une urne qui contient n boules blanches et n boules vertes ($n \geq 2$).
5. On lance trois dés simultanément.
6. On choisit trois élèves dans la classe pour former un groupe de khôle.
7. On répartit n boules numérotées de 1 à n dans quatre urnes U1, U2, U3 et U4.
8. On donne aux n enfants d'un centre aéré un numéro de 1 à n au hasard (chaque enfant a un numéro distinct).
9. On forme une anagramme du mot MATHS.
10. On forme un nombre de 6 chiffres.

Exercice R 2. Dans cet exercice, on appelle main tout ensemble de 3 cartes prises dans un jeu de 52 cartes.

1. Comment formaliser une main ? Combien de mains différentes peut-on obtenir ?
2. Combien y a-t-il de mains différentes contenant une seule reine ?
3. Combien y a-t-il de mains différentes contenant exactement deux trèfles dont la reine de trèfle ?
4. Combien y a-t-il de mains différentes contenant au moins une reine ?
5. Combien y a-t-il de mains différentes contenant une seule reine et un seul trèfle ?
6. Combien y a-t-il de mains différentes contenant une seule reine ou un seul trèfle ?

Exercice R 3. On lance deux fois un dé à six faces.

1. Comment formaliser un résultat ? Combien y a-t-il de résultats différents ?
2. Combien y a-t-il de résultats tels que la somme des numéros des deux dés fasse 8 ?
3. Combien y a-t-il de résultats tels que le plus grand des numéros des deux dés soit inférieur à 3 ?
4. Combien y a-t-il de résultats tels que le produit des numéros des deux dés soit un multiple de 6 ?
5. Utiliser le langage Python pour vérifier vos résultats.

Exercice R 4. Combien de nombres peut-on former contenant uniquement r fois le chiffre 1, s fois le chiffre 2 et t fois le chiffre 3 ?

Exercice E 1.

1. Une urne contient des boules blanches et des boules noires (on ne peut discerner deux boules de la même couleur). On tire successivement 6 boules de l'urne en y remettant à chaque fois la boule tirée. On appelle résultat la suite ordonnée des six couleurs obtenues.
   a. Quel est le nombre de résultats distincts ?
   b. Combien de résultats amènent :
      i. 5 boules noires puis une boule blanche dans cet ordre ?
      ii. au moins une boule blanche ?
      iii. au plus une boule noire ?
      iv. 2 boules blanches et 4 boules noires dans un ordre quelconque ?
2. Une urne contient 5 boules blanches numérotées de 1 à 5 et 8 boules noires numérotées de 6 à 13. On tire successivement 6 boules de l'urne en y remettant à chaque fois la boule tirée. On appelle résultat la suite ordonnée des six numéros obtenus. Reprendre les questions précédentes.

Exercice E 2. On tire deux boules successivement, sans remise, d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Combien y a-t-il de tirages tels que les numéros soient tirés dans l'ordre croissant ?

Exercice E 3. Une classe comporte 42 étudiants.

1. En fin de journée, après les cours, trois salles d'études sont à la disposition des étudiants. De combien de façons peuvent se répartir dans ces trois salles les quinze étudiants qui ont décidé de rester travailler au lycée ?
2. La salle de cours comporte 48 chaises. De combien de façons différentes les étudiants peuvent ils s'asseoir ?
3. A la fin de l'année, chaque étudiant présente individuellement son TIPE devant ses professeurs. Les passages sont répartis équitablement sur 6 demi-journées, à savoir 7 étudiants par demi-journée. De combien de façons peut-on organiser ces passages ?
4. Combien peut-on faire de groupes de colles (trinômes) distincts dans cette classe ?

Exercice E 4.

1. Combien de nombres de 9 chiffres distincts peut-on former avec les chiffres de 1 à 9 ?
2. Combien parmi ces nombres sont tels que les chiffres 1, 2 et 3 se suivent dans cet ordre ? se suivent dans un ordre quelconque ?
3. Vérifiez vos résultats en utilisant le langage Python.

Exercice A 1. On tire successivement toutes les boules d'une urne qui en contient n.

1. Comment formaliser un tirage ? Combien de tirages différents peut-on obtenir ?
   Dans l'urne il y a 2 boules noires, les autres sont rouges.
2. Combien y a-t-il de tirages tels que la première boule noire soit tirée au premier tirage ?

3. Soit $i \in \{1, \dots n-1\}$. Combien y a-t-il de tirages tels que la 1re boule noire soit tirée au tirage i ?
4. Combien y a-t-il de tirages tels que les deux boules noires soient tirées aux deux premiers tirages ?
5. On fixe i et j entre 1 et n, avec $i < j$. Combien y a-t-il de tirages tels que les deux boules noires soient tirées aux tirages i et j ?
6. Soit $i \in \{2 \dots n\}$. Combien y a-t-il de tirages tels que la 2de boule noire soit tirée au tirage i ?

Exercice A 2.

1. Déterminer le nombre d'applications injectives d'un ensemble de p éléments dans un ensemble de n éléments (ici $1 \leq p \leq n$).
2. On classe 20 individus selon un critère donné. on suppose qu'il n'y a pas d'*ex aequo*. On retient la liste ordonnée des quatre premiers. Combien y a-t-il de listes possibles ?
3. De combien de manières peut-on classer 4 individus en supposant qu'il puisse y avoir des *ex aequo* ?

2 Démontrer une égalité par le dénombrement

Exercice R 5. *Formule sans nom*
Soient p et n deux entiers vérifiant $1 \leq p \leq n$. On considère un ensemble fini E de cardinal n. Dénombrer de deux façons distinctes l'ensemble des couples (A, a) constitués d'une partie A de E de cardinal p et d'un élément a de A et en déduire l'égalité :

$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$$

Exercice E 5. *Formule de Van Der Monde*
On considère un ensemble de jetons formé de a jetons jaunes et b verts. On en pioche n simultanément.

1. Comment formaliser un tirage ? Combien de tirages différents peut-on obtenir ?
2. Combien de tirages différents peut-on obtenir si on veut prendre exactement k jetons jaunes ?
3. En déduire que $\displaystyle\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$.

Exercice A 3. Soit une caisse contenant $n+1$ boules numérotées de 1 à $n+1$. On en pioche $p+1$ simultanément ($p \leq n$).

1. Combien de tirages différents peut-on obtenir ?
2. Soit $k \in [\![1; n+1]\!]$. Combien de tirages différents peut-on obtenir de manière à ce que le plus grand de tous les numéros tirés soit égal à k ?
3. En déduire que $\displaystyle\binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}$.

3 Méthodes

Raisonnement par choix successifs

Pour dénombrer un ensemble E, on peut compter le nombre de façons différentes possibles de construire un élément de cet ensemble.
Exemple proposé par Mme Fekkar : Au menu du self aujourd'hui, il y a une entrée au choix (Carottes râpées ou Pâté ou Friand), une viande au choix (Poulet ou Rôti de porc ou Saucisse ou Poisson), un légume au choix (Frites ou Petits pois) et un dessert au choix (Fromage ou glace ou Orange).
Pour dénombrer l'ensemble E des repas possibles, on va compter le nombre de façons différentes possibles de construire un repas. On va alors choisir : Une entrée **et** une viande **et** un légume **et** un dessert. Le nombre total de repas différents (= Card E) sera le **produit** de ces choix.
Lorsqu'il y a disjonction de cas (ou), on effectue une somme. Ici on a donc Card $E = 3 \times 4 \times 2 \times 3$.
Attention, dans ce type de raisonnement, le nombre de choix à une étape ne doit pas dépendre de l'élément choisi à une étape antérieure et on ne doit pas pouvoir retomber sur le même élément de E en effectuant des choix successifs différents.

Listes, combinaisons, permutations, ...

- On utilise les p-listes (avec ou sans répétition) dans les problèmes où l'ordre intervient et les p-combinaisons dans les problèmes où l'ordre n'intervient pas.
- On utilise les permutations dans les problèmes de choix d'un ordre des éléments d'un ensemble : n-liste d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n.
- Quand l'énoncé demande de dénombrer l'ensemble des cas où il y a au moins... ou au plus..., il faut se poser la question de savoir s'il est plus simple de dénombrer cet ensemble ou son complémentaire.

Démontrer une égalité par le dénombrement

On peut essayer de dénombrer le même ensemble par deux méthodes différentes :

- essayer par exemple de changer l'ordre dans lequel on compte les différents objets,
- quand l'égalité fait apparaître une somme, essayer de procéder par disjonction de cas dans l'une des deux méthodes (écrire l'ensemble que l'on souhaite dénombrer comme l'union d'ensembles deux à deux disjoints)
- penser aux combinaisons lorsque l'égalité fait apparaître des coefficients binomiaux

Dénombrer par bijection

Pour déterminer le cardinal d'un ensemble fini, on peut essayer de le mettre en bijection avec un autre ensemble dont on connait le cardinal.