Ex 3 TD 26

① $\operatorname{mat}_B(B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -i & -1 \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2+L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 \times i}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$

donc $\operatorname{rg}(\operatorname{mat}_B(B')) = 3$

et $\operatorname{mat}_B(B')$ est inversible donc $B'$ base de $B$

② $P_{B,B'} = \operatorname{mat}_B(B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -i & -1 \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix}$

Soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$. Résolvons l'éq $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = P_{BB'} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

d'inconnue $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.

$\begin{cases} X = x+z \\ Y = -x - iy - z \\ Z = y + iz \end{cases}$ ssi $\underset{L_2 \leftarrow L_2+L_1}{}$ $\begin{cases} X = x+z \\ X+Y = -iy \\ y = Z - iz \end{cases}$ ssi $\begin{cases} X = x+z \\ X+Y = -i(Z-iz) \\ y = Z - iz \end{cases}$

ssi $\begin{cases} X = x+z \\ X+Y+iZ = -z \\ y = Z - iz \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x = X - z = X + (X+Y+iZ) = 2X + Y + iZ \\ z = -(X+Y+iZ) \\ y = Z + (iX + iY - Z) = iX + iY \end{cases}$

Donc $P_{B,B'}$ a pour inverse $P_{B,B'}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & i \\ i & i & 0 \\ -1 & -1 & -i \end{pmatrix}$

③ Par la formule de changt de base,

$\operatorname{mat}_{B'}(\varphi) = P_{BB'}^{-1} \operatorname{mat}_B(\varphi) P_{BB'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

④ $\operatorname{rg}(\operatorname{mat}_{B'}(\varphi)) = \operatorname{rg}(C_1, C_2, C_3) = \operatorname{rg}(C_3, C_1, C_2) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3$

donc $\operatorname{mat}_{B'}(\varphi)$ est inversible et $\varphi$ est bijective

De plus $\varphi$ est une appl linéaire (devrait être dit dans l'énoncé)

donc $\varphi$ est un automorphisme. On a de plus, en posant

$e'_1 = e_1 - e_2$, $e'_2 = -ie_2 + e_3$ et $e'_3 = e_1 - e_2 + ie_3$

$\varphi(e'_1) = ie'_2$ $\varphi(e'_2) = -e'_3$ et $\varphi(e'_3) = ie'_1$ (lecture de $\operatorname{mat}_{B'}(\varphi)$)

Donc $\varphi^{-1}(ie'_2) = i\varphi^{-1}(e'_2) = e'_1$ donc $\varphi^{-1}(e'_2) = -ie'_1$

$\varphi^{-1}(-e'_3) = e'_2$ donc $-\varphi^{-1}(e'_3) = e'_2$ donc $\varphi^{-1}(e'_3) = -e'_2$

et $\varphi^{-1}(e'_1) = -ie'_3$

donc $\operatorname{mat}_{B'}(\varphi^{-1}) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \varphi^{-1}(e'_1) & \varphi^{-1}(e'_2) & \varphi^{-1}(e'_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{array} \end{array}$

donc $\operatorname{mat}_{B}(\varphi^{-1}) = P_{B'B}^{-1} \operatorname{mat}_{B'}(\varphi) P_{B'B} = P_{BB'} \operatorname{mat}_{B'}(\varphi) P_{B'B}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -i & -1 \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & i \\ i & i & 0 \\ -1 & -1 & -i \end{pmatrix}$ A calculer

5) $(\operatorname{mat}_{B'}(\varphi))^2 = \operatorname{mat}_{B'}(\varphi\circ\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \operatorname{mat}_{B'}(\varphi^{-1})$

donc $\varphi\circ\varphi = \varphi^{-1}$ donc $(\operatorname{mat}_B(\varphi))^3 = \operatorname{mat}_B(\varphi^3) = \operatorname{mat}_B(id)$

donc $\varphi\circ\varphi\circ\varphi = id$

$= I_3$

exc 4 TD26

$D = \text{Vect}(u)$ où $u = (3,2,1)$ et $\Pi$ est un hyperplan

$u \notin \Pi$ car $1.3 + 2.2 + 3.1 = 10 \neq 0$.

Donc $\left.\begin{array}{l} \dim D + \dim \Pi = 3 \\ D \cap \Pi = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \end{array}\right\} \Rightarrow$ D et $\Pi$ sont supplémentaires

Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$\exists! \lambda \in \mathbb{R}$ tq $v - \lambda u \in \Pi$

$\lambda u$ est la projection de $v$ sur D parallèlement à $\Pi$

le scalaire $\lambda$ est donc défini par

$1(x - 3\lambda) + 2(y - 2\lambda) + 3(z - \lambda) = 0$

càd $\lambda = \frac{1}{10}(x + 2y + 3z)$.

Soit $p : (x, y, z) \mapsto (x', y', z')$

avec $\begin{cases} x' = \frac{3}{10}(x + 2y + 3z) \\ y' = \frac{2}{10}(x + 2y + 3z) \\ z' = \frac{1}{10}(x + 2y + 3z) \end{cases}$ p est la projection sur D parallèlement à $\Pi$

et $P = \text{mat}_{B_C}(p) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ où $B_C$ base canonique de $\mathbb{R}^3$

ex 5 TD26

① Une base de $\Pi$ est par exemple $(u,v)$ où $u=(2,1,0)$, $v=(-5,0,1)$

$D$ $(w)$ où $w=(1,2,1)$.

or $(u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ car Card$(u,v,w)=3$ et $(u,v,w)$ est libre (le vérifier), Donc $\mathbb{R}^3=\Pi\oplus D$

② autre méthode que dans l'ex 4.

Exprimons $p$ relativement à $B'=(u,v,w)$

$\text{mat}_{B'}(p)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ car $p(u)=u$ $p(v)=v$ et $p(w)=w$ puisque $u\in\Pi$ $v\in\Pi$ et $w\in D$

par la formule de changt de base,

$\text{mat}_B(p)=P_{B,B'}\,\text{mat}_{B'}(p)\,P_{B',B}$

or $P_{B,B'}=\begin{pmatrix}2&-5&1\\1&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}$ et $P_{B',B}=P_{B,B'}^{-1}$ à calculer

on obtient $\text{mat}_B(p)=\begin{pmatrix}\frac12&1&-\frac52\\-1&3&-5\\-\frac12&1&-\frac32\end{pmatrix}$

③ $s=2p-id$

donc $\text{mat}_B(s)=2\,\text{mat}_B(p)-I_3=\begin{pmatrix}0&2&-5\\-2&5&-10\\-1&2&-4\end{pmatrix}$

De plus si $p'$ est la proj sur $D$ parallèlement à $\Pi$

alors $p+p'=id$

donc $\text{mat}_B(p')=I_3-\text{mat}_B(p)=\begin{pmatrix}\frac12&-1&\frac52\\1&-2&5\\\frac12&-1&\frac52\end{pmatrix}$

et $\text{mat}_B(s')=2\,\text{mat}_B(p')-I_3$

$$=\begin{pmatrix}0&-2&5\\2&-5&10\\1&-2&4\end{pmatrix}$$