TD26 ex 6

- Soit $P = \text{mat}_{B_C}(f)$ où B_C est la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$B_C = (\underbrace{(1,0,0)}_{e_1}, \underbrace{(0,1,0)}_{e_2}, \underbrace{(0,0,1)}_{e_3})$

$f(e_1) = (3,4,-5) = 3e_1 + 4e_2 - 5e_3$

$f(e_2) = (-4,-7,10) = -4e_1 - 7e_2 + 10e_3$

$f(e_3) = (-2,-4,6) = -2e_1 - 4e_2 + 6e_3$

alors $P = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 4 & -7 & -4 \\ -5 & 10 & 6 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$

En faisant le calcul de P^2, on obtient que $P^2 = P$. Or $P^2 = \text{mat}_{B_C}(f \circ f)$

donc $\text{mat}_{B_C}(f \circ f) = \text{mat}_{B_C}(f)$ donc $f \circ f = f$

or $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \Rightarrow$ <u>f est une projection vectorielle</u>

- Soit $S = \text{mat}_{B_C}(g)$ alors $S = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}$

En faisant le calcul de S^2 on obtient que $S^2 = I_3$

or $S^2 = \text{mat}_{B_C}(g \circ g)$ donc $\text{mat}_{B_C}(g \circ g) = \text{mat}_{B_C}(id_{\mathbb{R}^3})$

donc $g \circ g = id_{\mathbb{R}^3}$

or $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \Rightarrow$ <u>g est une symétrie vectorielle</u>

TD26 ex 7

① • Soit $(M,N) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\varphi(\alpha M+N) = A(\alpha M+N) - (\alpha M+N)A = \alpha AM + AN - \alpha MA - NA$$
$$= \alpha(AM-MA) + (AN-NA) = \alpha\varphi(M)+\varphi(N)$$

donc φ est linéaire

De plus $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ $\varphi(M) = AM - MA \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est stable par cl et par produit

Ainsi $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$

• la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est $B_c = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$

or $\varphi(E_{11}) = \varphi\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-2\\0&0\end{pmatrix} = -2E_{12}$

de même $\varphi(E_{12}) = \begin{pmatrix}0&-2\\0&0\end{pmatrix} = -2E_{12}$

$\varphi(E_{21}) = \begin{pmatrix}2&0\\2&-2\end{pmatrix} = 2E_{11} + 0E_{12} + 2E_{21} - 2E_{22}$

$\varphi(E_{22}) = \begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix} = 2E_{12}$

Donc $P = \text{mat}_{B_c}(\varphi) =$
$$\begin{array}{cccccc} & \varphi(E_{11}) & \varphi(E_{12}) & \varphi(E_{21}) & \varphi(E_{22}) & \\ \left(\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right. & \begin{array}{c}0\\-2\\0\\0\end{array} & \begin{array}{c}0\\-2\\0\\0\end{array} & \begin{array}{c}2\\0\\2\\-2\end{array} & \begin{array}{c}0\\2\\0\\0\end{array} & \left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right) \begin{array}{c}E_{11}\\E_{12}\\E_{21}\\E_{22}\end{array}\end{array}$$

2) $\text{rg}(P) = \text{rg}(\varphi) = 2$ car $\text{Vect}(\varphi(E_{11}), \varphi(E_{12}), \varphi(E_{21}), \varphi(E_{22}))$
$= \text{Vect}(\varphi(E_{11}), \varphi(E_{12}))$
et $\varphi(E_{11})$ et $\varphi(E_{12})$ non col
donc $(\varphi(E_{11}), \varphi(E_{12}))$ est une base de $\text{Im}\,\varphi$

Par le th du rang, $4 = \dim \text{Ker}\,\varphi + \dim \text{Im}\,\varphi$

donc $\dim \text{Ker}\,\varphi = 2$

or $\varphi(E_{11}) + \varphi(E_{22}) = 0_2$ donc $\varphi(E_{11}+E_{22}) = 0_2$ donc $E_{11}+E_{22}$ est un élt de $\text{Ker}\,\varphi$

De même pour $E_{11} - E_{12}$ car $\varphi(E_{11}) - \varphi(E_{12}) = 0_2$

et $E_{11} - E_{12}$ et $E_{11} + E_{22}$ sont non col

donc $(E_{11} - E_{12}, E_{11} + E_{22})$ est une base de $\text{Ker}\,\varphi$

Ex 9 TD26

1) Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tq $\lambda u+\mu v = 0_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})}$

alors $\forall x\in\mathbb{R}$ $\lambda e^{ax}\cos(bx)+\mu e^{ax}\sin(bx) = 0_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})}(x) = 0$

or $e^{ax}\neq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

donc $\forall x\in\mathbb{R}$ $\lambda\cos(bx)+\mu\sin(bx)=0$

en particulier si $x=0$ alors $\lambda\cos(0)+\mu\sin(0)=0 \Rightarrow \lambda=0$

et si $x=\frac{\pi}{2b}$ alors $\lambda\times\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\mu\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \Rightarrow \mu=0$

donc (u,v) est une famille libre de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

$F=\mathrm{Vect}(u,v)$

2) $\left.\begin{array}{l} d\in\mathcal{L}(E) \\ id\in\mathcal{L}(E)\end{array}\right. \Rightarrow d+2id\in\mathcal{L}(E)$ or $F\subset E$

donc $d+2id$ et d sont linéaires.

Mq $\forall f\in F$, $d(f)\in F$ et $(d+2id)(f)\in F$.

Soit $f\in F$. $\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tq $f=\lambda u+\mu v$

$\forall x\in\mathbb{R}$ $f(x)=\lambda e^{ax}\cos(bx)+\mu e^{ax}\sin(bx)$

$\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=\lambda a e^{ax}\cos(bx)-b\lambda e^{ax}\sin(bx)+\mu a e^{ax}\sin(bx)$
$+\mu b e^{ax}\cos(bx)$

$\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=\underbrace{(\lambda a+\mu b)}_{\in\mathbb{R}}u(x)+\underbrace{(-b\lambda+\mu a)}_{\in\mathbb{R}}v(x)$

$d(f)=(\lambda a+\mu b)u+(\mu a-b\lambda)v$

Donc $f'\in F$ donc $d(f)\in F$.

De plus $f\in F$ donc $2id(f)=2f\in F$ $\Big\}\Rightarrow (d+2id)(f)\in F$

et $d\in\mathcal{L}(F)$ et $d+2id\in\mathcal{L}(F)$

$$\mathrm{mat}_B(d)=\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} d(u) & d(v) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \end{array}$$

$d(u)=d(1u+0v)=(1a+0b)u+(-b1+0a)v$

$d(u)=au-bv$

et $d(v)=d(0u+1v)=bu+av$

$$\mathrm{mat}_B(d+2id)=\begin{pmatrix} a+2 & b \\ -b & a+2\end{pmatrix}$$

$\det(\mathrm{mat}_B(d))=a^2+b^2>0$ car a et b sont réels et $b\neq 0$

$\det(\mathrm{mat}_B(d+2id))=(a+2)^2+b^2>0$ pour la même raison.

donc les 2 matrices sont inversibles et $d\in GL(F)$
et $d+2id\in GL(F)$

ex 9 3) ici $a=5$ et $b=2\neq 0$

$y''' = d^3(y)$ s'écrit matriciellement :

$$\underset{B}{mat}(d^3(y)) = mat_B(d^3) \times mat_B(y)$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}^3 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 491 \\ 53 \end{pmatrix}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $\underline{y'''(x) = 491\, e^{5x}\cos(2x) + 53\, e^{5x}\sin(2x)}$

4) on reconnaît une éq diff du 2d ordre à coeff cstts

EH : $y''+4y'+4y=0$

EC $r^2+4r+4=0$ -2 est rac double

Donc $\mathcal{S}_H = \{x \mapsto \lambda e^{-2x} + \mu x e^{-2x},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}$

Cherchons une solution particulière

ici $a=3$ et $b=1$

$y''+4y'+4y = (d+2id)^2(y)$

or $(d+2id)$ est une bijection sur F et donc $(d+2id)^2$ aussi

et $w = 3u+v \in F$

donc w admet un unique antécédent dans F par $(d+2id)^2$: y_H

$(d+2id)^2(y_H) = w$ s'écrit matriciellement

$$\underset{B}{mat}((d+2id)^2(y_H)) = mat_B(d+2id)^2 \times mat_B(y_H) = \underset{B}{mat}(w)$$

càd $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}^2 \times mat_B(y_H) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

donc $mat_B(y_H) = \begin{pmatrix} 5 & +1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}^{-2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Après calculs on obtient $\begin{pmatrix} \frac{11}{169} \\ \frac{-19}{338} \end{pmatrix}$

Ainsi $y_H(x) = \frac{11}{169} e^{3x}\cos x - \frac{19}{338} e^{3x}\sin x$

Finalement $\underline{\mathcal{S} = \{x \mapsto \lambda e^{-2x} + \mu x e^{-x} + y_H(x),\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}}$