Chapitre 27 : Dénombrement

1 Ensembles finis

Définition 1 (Ensemble fini).

*Un ensemble E est un **ensemble fini** s'il existe un entier naturel n tel que E soit en bijection avec $[[1,n]]$. Un ensemble qui n'est pas fini est appelé **ensemble infini**.*

Définition 2 (Cardinal d'un ensemble fini).

*Soit E est un ensemble fini. Il existe un unique entier naturel n tel que E soit en bijection avec $[[1,n]]$. n est appelé **cardinal de** E et est noté $card(E)$ ou $|E|$ ou $\#E$.*
Par convention, $\emptyset$ est un ensemble fini et $card(\emptyset) = 0$.

► Exemples :
Si $n \in \mathbb{N}$, $[[1,n]]$ est fini et a pour cardinal n, $[[0,n]]$ est fini et a pour cardinal $n+1$.
Si $p, n \in \mathbb{N}$, $[[p+1, p+n]]$ est fini et a pour cardinal n.
Si $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}$ et $p \leq q$, $[[p,q]]$ a pour cardinal $q-p+1$.

Propriété 1 (Ensemble en bijection avec un ensemble fini).

Si E est un ensemble fini de cardinal n et si F est un ensemble qui est en bijection avec E alors F est aussi de cardinal n.

Remarque 1. *Si E est fini, $card(E)$ est le nombre d'éléments de E.*
Tout ensemble en bijection avec un ensemble fini de cardinal n est fini de cardinal n car la composée de deux bijections est une bijection : si ϕ est une bijection de F sur E et ψ une bijection de E sur $[[1,n]]$, alors $\psi \circ \phi$ est une bijection de F sur $[[1,n]]$. Un ensemble en bijection avec un ensemble infini est infini.
Si E est fini de cardinal n alors on peut numéroter les éléments de E et écrire E en extension : $E = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$.
***Attention**, l'écriture $E = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ n'implique pas que $card(E) = n$ car deux éléments x_k peuvent être égaux !*

Théorème 1 (Sous-ensemble d'un ensemble fini).

Si E est un ensemble fini et F une partie de E, alors F est un ensemble fini et $card(F) \leq card(E)$ avec égalité ssi $E = F$.

Remarque 2. *Ainsi un ensemble fini ne peut être en bijection avec une de ses parties strictes. Mais un ensemble infini le peut : prendre par exemple $n \mapsto 2n$, bijection de $\mathbb{N}$ sur l'ensemble des nombres pairs, ensemble strictement inclus dans $\mathbb{N}$.*

Propriété 2 (Caractérisation de l'injectivité d'une application d'un ensemble fini dans un ensemble fini).

Soient E et F deux ensembles finis et f une application de E dans F.
$card f(E) \leq card E$.
L'application f est injective ssi $card f(E) = card E$.

Théorème 2 (Application d'un ensemble fini dans un ensemble fini de même cardinal).

*Soient E et F deux ensembles finis **de même cardinal** et f une application de E dans F.*
Les trois propriétés sont équivalentes : f est injective,
f est surjective,
f est bijective.

2 Opération sur les ensembles finis

Propriété 3 (Réunion d'ensembles finis disjoints).

Si A et B sont deux ensembles finis ***disjoints****, alors $A \cup B$ est fini et*

$$card(A \cup B) = cardA + cardB.$$

Généralisation à n ensembles finis deux à deux disjoints.

Propriété 4.

Si A est une partie d'un ensemble fini E alors $card(C_E A) = cardE - cardA$.

Propriété 5 (Réunion d'ensembles finis - cas général).

Si A et B sont deux ensembles finis, alors $A \cup B$ est fini et

$$card(A \cup B) = cardA + cardB - card(A \cap B).$$

Propriété 6 (Produit d'ensembles finis).

Si A et B sont deux ensembles finis, alors $A \times B$ est fini et

$$card(A \times B) = cardA \times cardB$$

Par récurrence on obtient le résultat suivant :
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et A un ensemble fini, l'ensemble A^p est fini et

$$\text{card}(A^p) = (\text{card}A)^p.$$

$\text{card}(A^p)$ représente le nombre de p-uplets de l'ensemble fini A..

3 Listes, arrangements, permutations et combinaisons

3.1 p-listes

Propriété 7 (Nombre de p-listes d'un ensemble fini).

*Une p-**liste** d'éléments de E est un p-uplet d'éléments de E.*
Si E est un ensembe fini de cardinal n, le nombre de p-listes d'éléments de E est n^p.

Propriété 8 (Cardinal de $\mathcal{F}(E,F)$).

Soient E et F des ensembles de cardinaux respectifs p et n. L'ensemble des applications de E dans F, noté F^E ou $\mathcal{F}(E,F)$ a pour cardinal n^p.

$$card\mathcal{F}(E,F) = n^p.$$

La notation F^E a du sens puisque $\text{card}F^E = \text{card}F^{\text{card}E}$.

3.2 Arrangements

Définition 3 (p-arrangement).

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle p-arrangement d'un ensemble E toute p-liste ***d'éléments distincts*** *de E.*

Propriété 9 (nombre de p-arrangements).

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Si $1 \leq p \leq n$ alors le nombre de p-arrangements d'un ensemble de cardinal n, noté parfois A_n^p, est $n(n-1)\cdots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$. Sinon, si $p > n$, alors ce nombre est nul.

Propriété 10 (Nombre d'injections).

Le nombre d'injections d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble F de cardinal n est $n(n-1)\cdots(n-p+1)$

3.3 Permutations

Propriété 11 (Cardinal de l'ensemble des bijections de E).

*Une **permutation d'un ensemble** E est une bijection de E dans lui-même.*
Le nombre de permutations de $[[1,n]]$ est $n!$
Si card$E = n$, le nombre de permutations de E est $n!$

Plus généralement, le nombre de bijections d'un ensemble de cardinal n dans un autre ensemble de cardinal n est $n!$

3.4 Combinaisons

Propriété 12 (Cardinal de l'ensemble des parties ayant p éléments d'un ensemble à n éléments.).

Soit E un ensemble à n éléments. Une combinaison à p éléments de l'ensemble E est une partie de E de cardinal p.

On note $\binom{n}{p}$ le nombre de combinaisons à p éléments d'un ensemble à n éléments.

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}.$$

Par convention, $\binom{n}{0} = 1$.

Etant donnés $n, p \in \mathbb{N}$, on distingue deux cas :

— si $p \leq n$, $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$,

— si $p > n$, $\binom{n}{p} = 0$.

Propriété 13 (Relations).

Soient $n, p \in \mathbb{N}$.

1. *si $p \leq n$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$,*
2. ***triangle de Pascal** : si $n \geq 1$ et $p \geq 1$ et $p \leq n$,*
   $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$

Propriété 14 (Binôme de Newton).

Pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$.

Propriété 15 (Cardinal de l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$).

Du binôme de Newton on déduit : $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} = 2^n$.

Interprétation ensembliste : si E *est fini de cardinal* n, *card*$\mathcal{P}(E) = 2^n$.