Exercice : 1 Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

$\frac{1}{n(n-1)} \geq 0$ et $\frac{1}{n(n-1)} \sim \frac{1}{n^2}$ donc, par le théorème d'équivalence positive, comme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ CV (série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$) donc $\underline{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n-1)}}$ CV

2. Soit $n \geq 2$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur $[n-1, n]$, décroissante et positive. On a donc : si $t \in [n-1, n]$

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{n-1}$$ et par croissance de l'intégrale :

$$\int_{n-1}^{n} \frac{dt}{n} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{n-1}$$

$$\frac{1}{n} \underbrace{(n-(n-1))}_{=1} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n-1} \underbrace{(n-(n-1))}_{=1} \quad \text{cqfd.}$$

3. $\forall n \geq 2$ $$\frac{1}{n} - \frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n-1)}{n(n-1)}$$

$\forall n \geq 2$ $$0 \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n(n-1)} \quad (\Delta)$$

or $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ CV d'après la question 1

Par RCSTP (th de majoration), comme on a (Δ) et $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ CV, on en conclut que $\underline{\sum_{n\geq 2} \left(\int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t} - \frac{1}{n}\right)}$ CV.

4. Soit $n \geq 2$ $$S_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t} - \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

$$S_n = \int_{1}^{n} \frac{dt}{t} - \left(H_n - \frac{1}{1}\right) = \int_{1}^{n} \frac{dt}{t} - H_n + 1 = [\ln t]_1^n - H_n + 1$$

$$\underline{S_n = \ln n - H_n + 1.}$$

5. Comme $\sum_{n\geq 2} \left(\int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t} - \frac{1}{n}\right)$ CV on sait que (S_n) CV. Soit l sa limite. Alors $\lim_{n\to+\infty} \ln n - H_n + 1 = l$. Il existe donc $\gamma = 1 - l$ tel que $\forall n \geq 1$, $\ln n - H_n = -\gamma + o(1)$ càd $\underline{\forall n\geq 1, H_n = \ln n + \gamma + o(1)}$.

Pb 1 A - ① $z' + z\,th(t) = 0$. 2bis/11

$t \mapsto th(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$
$t \mapsto \ln(ch(t))$ est l'une d'entre elles
D'après le cours, l'ensemble S_0 des solutions est :
$S_0 = \{t \mapsto K e^{-\ln(ch(t))}, K \in \mathbb{R}\} = \{t \mapsto K e^{\ln\left(\frac{1}{ch t}\right)}, K \in \mathbb{R}\}$
$z_1 \in S_0$ donc il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$ $z_1(t) = \frac{K}{ch t}$
or $z_1(0) = 1$ donc $\frac{K}{ch(0)} = 1$, donc $K = ch(0) = 1$

3 Donc $z_1 : t \mapsto \frac{1}{ch t}$

A - ② $z' + z\,th(t) = t \times th(t)$ (E)
Appliquons la méthode de variation de la constante, càd
on cherche z_p sous la forme : $z_p : t \mapsto \frac{K(t)}{ch t}$ où K est dér sur $\mathbb{R}$
z_p sol de (E) ssi $\forall t \in \mathbb{R}$, $z_p'(t) + z_p(t)\,th(t) = t \times th(t)$
ssi $\forall t \in \mathbb{R}$, $\frac{K'(t)\,ch t - K(t)\,sh t}{ch^2 t} + \frac{K(t)\,th(t)}{ch t} = t\,th(t)$
ssi $\forall t \in \mathbb{R}$, $\frac{K'(t)}{ch(t)} = t\,th(t)$,
ssi $\forall t \in \mathbb{R}$ $K'(t) = t\,sh(t)$.

on propose par exemple $\forall t \in \mathbb{R}$ $K(t) = t\,ch(t) - sh(t)$,
(obtenu en intégrant par parties : pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$\int_0^t x\,sh(x)\,dx = [x\,ch(x)]_0^t - \int_0^t ch(x)\,dx = t\,ch(t) - 0\,ch(0) - [sh x]_0^t$
$= t\,ch t - sh t + sh(0)$.
5,5 où $u : x \mapsto x$ $v' : x \mapsto sh(x)$ u, v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$
$u' : x \mapsto 1$ $v = x \mapsto ch(x)$)

Ainsi $z_p : t \mapsto \frac{t\,ch(t) - sh(t)}{ch(t)}$ est une sol part de (E),
D'après le cours, l'ensemble des solutions de (E) est :

$\{t \mapsto \frac{K}{ch t} + t - th t, K \in \mathbb{R}\} = S$,
$z_2 \in S$ donc il existe $K \in \mathbb{R}$ tq $z_2(t) = \frac{K}{ch t} + t - th t$
et $z_2(0) = 0$ donc $\frac{K}{ch(0)} + 0 - th(0) = 0$, donc $K = 0$
et $z_2 : t \mapsto t - th t$

Premier problème.

Partie A

1. L'équation linéaire du premier ordre s'écrit : $z' = -z \operatorname{th} t$; or une primitive de $-\operatorname{th} t$ est $-\ln(\operatorname{ch} t)$; donc $\exists \lambda \in \mathbb{R} \,/\, z(t) = \lambda e^{-\ln(\operatorname{ch} t)}$ ou $z(t) = \dfrac{\lambda}{\operatorname{ch} t}$.

$z(0) = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1$, d'où $z_1(t) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} t}$.

voir page 2bis pour corrigé plus détaillé

2. L'équation sans second membre a déjà été résolue au *1.*

La recherche d'une solution particulière par la méthode de variation de la constante donne, en posant $z = \dfrac{\lambda(t)}{\operatorname{ch} t}$, $\dfrac{\lambda'(t)}{\operatorname{ch} t} = t \operatorname{th} t$, soit $\lambda'(t) = t \operatorname{sh} t$; une intégration par parties donne :

$\int t \operatorname{th} t\,dt = t \operatorname{ch} t - \int \operatorname{ch} t\,dt = t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t$; une solution particulière est donc

$z = \dfrac{t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} = t - \operatorname{th} t$; d'où la solution générale : $z = \dfrac{\lambda}{\operatorname{ch} t} + t - \operatorname{th} t \quad (\lambda \in \mathbb{R})$.

$z_2(0) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$, d'où $z_2(t) = t - \operatorname{th} t$.

B. (1) $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch} t}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (ch ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$) et $I_1(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
donc cette fonction admet des primitives sur tout intervalle de $\mathbb{R}$
$t \mapsto e^t$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ donc on peut procéder au changement de variables $u = e^t$. On a $du = e^t dt = u\,dt$
De plus $\forall t \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch} t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} = \dfrac{u + u^{-1}}{2}$
Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}$, on a : $I_1(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch} t}$

$$I_1(x) = \int_1^{e^x} \frac{2\,du}{u(u+u^{-1})} = 2\int_1^{e^x} \frac{du}{u^2+1}$$
$$= 2\left[\arctan u\right]_1^{e^x} = 2\arctan e^x - 2\arctan 1$$
$$\boxed{I_1(x) = 2\arctan e^x - \frac{\pi}{2}}$$

(2) $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 t}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $I_2(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$
Soit $x \in \mathbb{R}$. $I_2(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch}^2 t} = \left[\operatorname{th} t\right]_0^x = \operatorname{th} x - \operatorname{th} 0 = \boxed{\operatorname{th} x = I_2(x)}$

(3) Soit $t \in \mathbb{R}$. On pose : $f(t) = \operatorname{sh} t$ $\quad f'(t) = \operatorname{ch} t$
$g(t) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^{k+1} t}$ $\quad g'(t) = \dfrac{-(k+1)\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^{k+2}(t)}$
f et g sont C^1 sur $\mathbb{R}$
On peut donc intégrer par parties : pour $x \in \mathbb{R}$,

$$I_k(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch}^{k+1}(t)}\,dt = \left[\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^{k+1} t}\right]_0^x + \int_0^x \frac{(k+1)\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^{k+2}(t)}\,dt$$
$$= \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^{k+1} x} + \int_0^x \frac{(k+1)(-1+\operatorname{ch}^2 t)}{\operatorname{ch}^{k+2}(t)}\,dt$$
$$= \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^{k+1} x} - (k+1)\int_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch}^{k+2}(t)} + (k+1)\int_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch}^k t}$$

Ainsi $I_k(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^{k+1} x} - (k+1)\,I_{k+2}(x) + (k+1)\,I_k(x)$, Soit $-k\,I_k(x) - \dfrac{sh(x)}{ch^{k+1}(x)} = -(k+1)\,I_{k+2}(x)$.

Ainsi $\boxed{I_{k+2}(x) = \dfrac{+k}{k+1} I_k(x) + \dfrac{1}{k+1}\dfrac{sh\,x}{ch^{k+1}x}}$

(4) (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $-x \in \mathbb{R}$ et $I_k(-x) = \int_0^{-x} \dfrac{dt}{ch^k t}$

on fait le changement de variable $u = -t$. Donc $du = -dt$

et $I_k(-x) = \int_0^{x} \dfrac{-du}{ch^k(-u)} = \int_0^{x} \dfrac{-du}{ch^k(u)}$ car ch est paire

$= -\int_0^x \dfrac{du}{ch^k(u)} = -I_k(x)$.

$\boxed{\text{Ainsi, } I_k \text{ est impaire sur } \mathbb{R}}$

(4) (b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$t \mapsto \dfrac{1}{ch^k t}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc I_k, qui est la primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{ch^k t}$ qui s'annule en 0, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $I_k' : x \mapsto \dfrac{1}{ch^k x}$. Comme I_k est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est continue sur $\mathbb{R}$.

(4) (c) $I_k' : x \mapsto \dfrac{1}{ch^k x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

(5) $\boxed{I_k' : x \mapsto \dfrac{1}{ch^k x}\ ;\quad I_k'' : x \mapsto \dfrac{-k\,sh\,x}{ch^{k+1}x}}$;

$I_k''' : x \mapsto \dfrac{-k\,ch\,x\,ch^{k+1}x + k(k+1)\,sh^2x\,ch^k x}{(ch^{k+1}x)^2}$

$I_k''' : x \mapsto \dfrac{-k\,ch^{k+2}x + k(k+1)(ch^2x-1)ch^k x}{(ch^{k+1}x)^2}$

$I_k''' : x \mapsto \dfrac{ch^{k+2}x\,(-k+k(k+1)) - k(k+1)\,ch^k x}{ch^{2k+2}x}$

$I_k''' : x \mapsto \dfrac{k^2ch^2x - k(k+1)}{ch^{k+2}x}$

$\boxed{I_k''' : x \mapsto \dfrac{k}{ch^{k+2}x}(k\,ch^2x - k - 1)}$

(6) Méthode 1 :

$ch\,x = 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$

$(ch\,x)^k = \left(1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^k = 1 + \dfrac{kx^2}{2} + o(x^3)$

$\dfrac{1}{(ch\,x)^k} = \dfrac{1}{1 + \frac{kx^2}{2} + o(x^3)} = 1 - \dfrac{kx^2}{2} + o(x^3)$

On intègre ce dernier développement limité

Méthode 2 : on applique la formule de Taylor-Young à l'application I_k qui est $\mathcal{C}^\infty$ donc $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$ en 0 à l'ordre 3.

$I_k(x) = I_k(0) + x - \frac{kx^3}{6} + o(x^3)$ or $I_k(0)=0$ d'où $\underline{I_k(x) = x - \frac{kx^3}{6} + o(x^3)}$

⑦ $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{ch^k x} > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $I_k'(x) > 0$

Concl: $\underline{I_k \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$

4/11

⑧ ⓐ Soit $t \in \mathbb{R}$. $ch\, t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ donc $\frac{1}{ch\, t} = \frac{2}{e^t + e^{-t}}$

or $e^{-t} > 0$ donc $e^t + e^{-t} > e^t$ donc $\frac{1}{e^t + e^{-t}} < \frac{1}{e^t}$

Ainsi $\frac{1}{ch\, t} < \frac{2}{e^t}$ càd $\frac{1}{ch\, t} < 2e^{-t}$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{ch^k t} < (2e^{-t})^k$ car $x \mapsto x^k$ est croissante strictement sur $\mathbb{R}^+$.

d'où $\frac{1}{ch^k t} < 2^k e^{-kt}$ et par croissance de l'intégrale,

Soit $x > 0$ $\int_0^x \frac{dt}{ch^k t} < \int_0^x 2^k e^{-kt} dt$. Or $\int_0^x 2^k e^{-kt} dt = 2^k \left[\frac{e^{-kt}}{-k} \right]_0^x$

$= 2^k \left(-\frac{e^{-xk}}{k} + \frac{1}{k} \right)$

on a donc $I_k(x) < 2^k \frac{1 - e^{-xk}}{k} < \frac{2^k}{k}$. $= 2^k \frac{1 - e^{-xk}}{k}$

La fonction I_k est croissante et majorée par $\frac{2^k}{k}$. D'après le théorème de la limite monotone, I_k admet donc une limite finie lorsque $x \to +\infty$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\underline{J_k \text{ existe}}$.

ⓑ $J_1 = \lim_{x \to +\infty} I_1(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(2\arctan e^x - \frac{\pi}{2} \right) = 2 \lim_{X \to +\infty} \arctan X - \frac{\pi}{2}$

$= 2 \times \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\pi}{2}}$

$J_2 = \lim_{x \to +\infty} I_2(x) = \lim_{x \to +\infty} th\, x = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \boxed{1}$

D'après ③, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $I_{k+2}(x) = \frac{k}{k+1} I_k(x) + \frac{1}{k+1} \frac{sh\, x}{ch^{k+1} x}$

Ainsi $\lim_{x \to +\infty} I_k(x) = J_k$. Or $\frac{sh\, x}{ch^{k+1} x} \sim \frac{\frac{e^x}{2}}{\left(\frac{e^x}{2}\right)^{k+1}}$ donc $\frac{sh\, x}{ch^{k+1} x} \sim \frac{2^k}{e^{kx}}$

or $\lim_{x \to +\infty} \frac{2^k}{e^{kx}} = 0$.

Donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{k+1} \frac{sh\, x}{ch^{k+1} x} = 0$. On en déduit que $\lim_{+\infty} I_{k+2} = \lim_{+\infty} \frac{k}{k+1} I_k$

soit $\lim_{+\infty} I_{k+2} = \frac{k}{k+1} \lim_{+\infty} I_k$ ou encore $\boxed{J_{k+2} = \frac{k}{k+1} J_k}$

$J_3 = \frac{1}{2} J_1 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$; $J_4 = \frac{2}{3} J_2 = \frac{2}{3}$; $J_5 = \frac{3}{4} J_3 = \frac{3\times 1}{4\times 2} \times \frac{\pi}{2}$; $J_6 = \frac{4}{5} J_4 = \frac{4\times}{5\times}$

- Cas où k est pair ($k=2p$).

Soit $\mathcal{P}(p)$: " $\boxed{J_{2p} = \frac{(2p-2)\times \cdots \times 2}{(2p-1)\times \cdots \times 3}}$ ". Montrons que $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout $p \geq 2$ par récurrence.

- Initialisation : si $p=2$ alors $J_{2p} = J_4 = \frac{2}{3}$.
- hérédité : supposons qu'il existe $p \geq 2$ tel que $\mathcal{P}(p)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(p+1)$ vraie.

$$J_{2p+2} = \frac{2p}{2p+1} J_{2p} = \frac{2p\,(2p-2)\times\cdots\times 2}{(2p+1)(2p-1)\times\cdots\times 3} = \frac{(2(p+1)-2)\times\cdots\times 2}{(2(p+1)-1)\times\cdots\times 3}$$

d'où $\mathcal{P}(p+1)$ vraie.

- Concl : $\forall p \geq 2$, $\mathcal{P}(p)$ vraie.

- Cas où k est impair ($k=2p+1$).

Soit $Q(p)$: " $\boxed{J_{2p+1} = \frac{(2p-1)\times\cdots\times 1}{2p\times\cdots\times 2}\,\frac{\pi}{2}}$ ". Montrons que $Q(p)$ est vraie pour tout $p \geq 1$ par récurrence.

- Initialisation : si $p=1$ alors $J_3 = J_{2p+1} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}$
- hérédité : supposons qu'il existe $p \geq 1$ tel que $Q(p)$ vraie et montrons que $Q(p+1)$ vraie.

$$J_{2p+3} = \frac{2p+1}{2p+2} J_{2p+1} = \frac{(2p+1)(2p-1)\times\cdots\times 1}{(2p+2)\times 2p\times\cdots\times 2}\frac{\pi}{2} \quad \frac{(2(p+1)-1)\times\cdots\times 1}{2(p+1)\times\cdots\times 2}\frac{\pi}{2}$$

d'où $Q(p+1)$ vraie.

- Concl : $\forall p \geq 2$ $Q(p)$ vraie.

Soit $p \geq 2$. $J_{2p} = \frac{(2p-2)\times\cdots\times 2}{(2p-1)\times\cdots\times 3} = \frac{(2p-2)\times\cdots\times 2}{\frac{(2p-1)!}{(2p-2)\times\cdots\times 2}} = \frac{((2p-2)\times\cdots\times 2)^2}{(2p-1)!}$

$$= \frac{(2(p-1)\times 2(p-2)\times\cdots\times 2\times 1)^2}{(2p-1)!} = \boxed{\frac{(2^{p-1})^2((p-1)!)^2}{(2p-1)!}}$$

avec $(2^{p-1})^2 = 2^{2p-2}$. Résultat encore vrai pour $p=$

Soit $p \geq 1$. $J_{2p+1} = \frac{(2p-1)\times\cdots\times 1}{2p\times\cdots\times 2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{(2p\times\cdots\times 2)^2}\frac{\pi}{2}$ $\frac{(2p)!}{(2\times p\times 2\times(p-1)\times\cdots)} \times \frac{\pi}{2}$

$$= \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}}$$

Résultat encore vrai pour $p=0$

Pb 2

Partie A

① Soit $(M_1,M_2)\in(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$

$$f(\lambda M_1+M_2)=(\lambda M_1+M_2)A-A(\lambda M_1+M_2)$$
$$=\lambda M_1A+M_2A-\lambda AM_1-AM_2=\lambda(M_1A-AM_1)+M_2A-AM_2$$
$$=\lambda f(M_1)+f(M_2)$$

et $\forall M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(M)=MA-AM\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ stable par $\times$ et par $-$. Ainsi $f\in\mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$

② $K=\{M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ AM-MA=0_2\}=\{M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ f(M)=0_2\}=\operatorname{Ker}f$

or $\operatorname{Ker}f$ est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc K également

③ $f(M)=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&a+c\\0&b+d\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b&d\\b&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-b&a+c-d\\-b&b\end{pmatrix}$

④ Soit $M=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. $M\in\operatorname{Ker}f$ ssi $f(M)=0_2$

$f(M)=0_2$ ssi $\begin{pmatrix}-b&a+c-d\\-b&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ ssi $\begin{cases}b=0\\a+c=d\end{cases}$ ssi $M=\begin{pmatrix}a&c\\0&a+c\end{pmatrix}$

$f(M)=0_2$ ssi $M=a\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$ ssi $M=aI_2+cA$

Donc $\operatorname{Ker}f=\operatorname{Vect}(I_2,A)$

Donc (I_2,A) est une famille génératrice de $\operatorname{Ker}f$

De plus (I_2,A) est une famille libre sur $\mathbb{R}$

En effet, Soit $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ tq $\lambda_1I_2+\lambda_2A=0_2$

plus rapide : I_2 et A non colinéaires

alors $\lambda_1\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1&\lambda_2\\0&\lambda_1+\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ donc $\lambda_1=\lambda_2=0$

Concl : (I_2,A) est une base de $\operatorname{Ker}f$ et $\dim(\operatorname{Ker}f)=2$

Par le théorème du rang, $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))=\dim\operatorname{Ker}f+\dim\operatorname{Im}f$

donc $\dim\operatorname{Im}f=\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))-\dim\operatorname{Ker}f=4-2=2$

Donc $\operatorname{rg}(f)=2$

⑤ $A^2=A$ Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ A^n=A$

⑥ Soit $N\in\operatorname{Ker}f$ alors $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tq $N=\alpha I_2+\beta A$.

$I_2A=AI_2=A$ donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

Soit $n\in\mathbb{N}^*$

$$N^n=(\alpha I_2+\beta A)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\alpha I_2)^k(\beta A)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\alpha^kI_2^k\beta^{n-k}A^{n-k}+\binom{n}{n}\alpha^nI_2^n\beta^0I_2$$

$$N^n=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\alpha^k\beta^{n-k}A+\alpha^n\beta^0I_2=\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\alpha^k\beta^{n-k}\right)A+\alpha^nI_2$$

$$N^n=\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^k\beta^{n-k}-\binom{n}{n}\alpha^n\beta^0\right)A+\alpha^nI_2$$

$$N^n=\left((\alpha+\beta)^n-\alpha^n\right)A+\alpha^nI_2=\begin{pmatrix}\alpha^n&(\alpha+\beta)^n-\alpha^n\\0&(\alpha+\beta)^n\end{pmatrix}$$

Pb 2 - B

7/11

(1) $f(1) = (1+X^2)0 - 2X0 = 0$

$f(X) = (1+X^2)0 - 2X1 = -2X$

$f(X^2) = (1+X^2)2 - 2X2X = 2+2X^2-4X^2 = 2-2X^2$

$f(X^3) = (1+X^2)6X - 2X3X^2 = 6X+6X^3-6X^3 = 6X$

(2) Soit $(P,Q) \in (\mathbb{R}_3[X])^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$f(\lambda P+Q) = (1+X^2)(\lambda P+Q)'' - 2X(\lambda P+Q)'$
$= (1+X^2)(\lambda P''+Q'') - 2X(\lambda P'+Q')$
$= \lambda(1+X^2)P'' + (1+X^2)Q'' - \lambda 2XP' - 2XQ'$
$= \lambda[(1+X^2)P''-2XP'] + [(1+X^2)Q''-2XQ']$
$= \lambda f(P) + f(Q)$.

Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Il existe $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4$ tq

$P = \alpha 1 + \beta X + \gamma X^2 + \delta X^3$

$f(P) = \alpha f(1) + \beta f(X) + \gamma f(X^2) + \delta f(X^3)$
$= \alpha \times 0 + \beta(-2X) + \gamma(2-2X^2) + \delta(6X)$ donc $f(P) \in \mathbb{R}_2[X] \subset \mathbb{R}_3[X]$

Donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$

(3) $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)) = \mathrm{Vect}(0, -2X, 2-2X^2, 6X)$

$= \mathrm{Vect}(-2X, 2-2X^2)$ or la famille $(-2X, 2-2X^2)$ est libre sur $\mathbb{R}$ car elle est échelonnée en degrés donc c'est une base de $\mathrm{Im} f$.

(4) Par le théorème du rang,
$\dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f = \dim \mathbb{R}_3[X] = 4$ car $\mathbb{R}_3[X]$ est de dim finie
Donc $\dim \mathrm{Ker} f = 4-2 = 2$ car $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im} f) = 2$

or $1 \in \mathrm{Ker} f$ car $f(1) = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$

et $X^3+3X \in \mathrm{Ker} f$ car $f(X^3+3X) = f(X^3)+3f(X) = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$

et $(1, X^3+3X)$ est une famille libre car de degrés échelonnés

Donc $(1, X^3+3X)$ est une base de $\mathrm{Ker} f$ car elle est libre et son cardinal est égal à $\dim \mathrm{Ker} f$

(5) $\mathcal{C} = (-2X, 2-2X^2, 1, X^3+3X)$

$\mathcal{C}$ est une famille échelonnée en degrés donc elle est libre et elle a 4 élts or $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$

Donc $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$

8/11

(6) $G \subset \mathbb{R}_3[X]$

$G = \{aX^3+bX^2+cX+d,\ (a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ et $f(aX^3+bX^2+cX+d) = -2aX^3-2bX^2-2cX-2d\}$

$G = \{aX^3+bX^2+cX+d,\ (a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ et $af(X^3)+bf(X^2)+cf(X)+df(1) = -2aX^3-2bX^2-2cX-2d\}$

$G = \{aX^3+bX^2+cX+d,\ (a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ et $a\times 6X+b(2-2X^2)+c(-2X) = -2aX^3-2bX^2-2cX-2d\}$

$G = \{aX^3+bX^2+cX+d,\ (a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ et $2b+(6a-2c)X-2bX^2 = -2d-2cX-2bX^2-2aX^3\}$

$G = \{aX^3+bX^2+cX+d,\ (a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ et $b=-d,\ a=0\}$ par identification des coordonnées d'un polynôme dans $\mathcal{C}$.

$G = \{-dX^2+cX+d,\ (c,d)\in\mathbb{R}^2\}$

$G = \{cX+d(1-X^2),\ (c,d)\in\mathbb{R}^2\}$

$G = \text{Vect}(X, 1-X^2) \overset{\text{Def}}{=}$ donc G est un sous espace engendré par la famille $\mathcal{G}=(X, 1-X^2)$. c'est donc un sev de $\mathbb{R}_3[X]$.

De plus $\mathcal{G}$ est libre car échelonnée en degrés. C'est une base de G.

(7) Soit $P\in\mathbb{R}_3[X]$ On note (x,y,z,t) ses coordonnées dans la base $\mathcal{C}$.

On a donc $P = x(-2X)+y(2-2X^2)+z(1)+t(X^3+3X)$

Comme f est linéaire, $f(P) = x\,f(\underbrace{-2X}_{\in G})+y\,f(\underbrace{2-2X^2}_{\in G})+z\,f(\underbrace{1}_{\in \text{Ker} f})+t\,f(\underbrace{X^3+3X}_{\in \text{Ker} f})$

donc comme $-2X\in G$, $f(-2X) = -2(-2X) = 4X$

$2-2X^2\in G$, $f(2-2X^2) = -2(2-2X^2) = -4+4X^2$

Donc $f(P) = x\times 4X+y(-4+4X^2)+z\cdot 0_{\mathbb{R}_3[X]}+t\,0_{\mathbb{R}_3[X]}$

$= -2x(-2X)+-2y(2-2X^2)+0(1)+0(X^3+3X)$

Donc les coordonnées de $f(P)$ dans la base $\mathcal{C}$ sont :

$(-2x, -2y, 0, 0)$.

① Soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$, $(x',y',z',t')\in\mathbb{R}^4$ Soit $\lambda\in\mathbb{R}$.

$\varphi\big(\lambda(x,y,z,t)+(x',y',z',t')\big)=\varphi(\lambda x+x',\lambda y+y',\lambda z+z',\lambda t+t')$

$=\big(2(\lambda x+x')-(\lambda z+z')+(\lambda t+t'),\,-2(\lambda x+x')+(\lambda z+z')-(\lambda t+t'),\,-(\lambda y+y')+(\lambda t+t'),\,-2(\lambda x+x')-(\lambda y+y')+(\lambda z+z')\big)$

$=(2\lambda x+2x'-\lambda z+z'+\lambda t+t',\,-2\lambda x-2x'+\lambda z+z'-\lambda t+t',\,-\lambda y-y'+\lambda t+t',\,-2\lambda x-2x'-\lambda y-y'+\lambda z+z')$

$=\lambda(2x-z+t,\,-2x+z-t,\,-y+t,\,-2x-y+z)+(2x'-z'+t',\,-2x'+z'-t',\,-y'+t',\,-2x'-y'+z')$

$=\lambda\,\varphi(x,y,z,t)+\varphi(x',y',z',t')$.

De plus, si $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$, $\varphi(x,y,z,t)=(2x-z+t,-2x+z-t,-y+t,-2x-y+z)\in\mathbb{R}^4$

donc $\underline{\varphi\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)}$

② Soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$. $(x,y,z,t)\in\operatorname{Ker}\varphi$ ssi $\varphi(x,y,z,t)=0_{\mathbb{R}^4}$

ssi $\begin{cases}2x-z+t=0\\-2x+z-t=0\\-y+t=0\\-2x-y+z=0\end{cases}$ ssi $\begin{cases}2x-z+t=0\\0=0 & L_2\leftarrow L_2-L_1\\y=t\\y=t & L_4\leftarrow L_4+L_1\end{cases}$ ssi $\begin{cases}z=2x+t\\y=t\\t\in\mathbb{R}\\x\in\mathbb{R}\end{cases}$

donc $\operatorname{Ker}\varphi=\{(x,t,2x+t,t),\ (x,t)\in\mathbb{R}^2\}$

$=\underline{\operatorname{Vect}((1,0,2,0),(0,1,1,1))}$

De plus $(1,0,2,0)$ et $(0,1,1,1)$ sont non colinéaires donc $\mathcal{F}=((1,0,2,0),(0,1,1,1))$ est une famille libre. Comme c'est une famille génératrice de $\operatorname{Ker}\varphi$, c'est une base de $\operatorname{Ker}\varphi$ et $\dim\operatorname{Ker}\varphi=\operatorname{Card}(\mathcal{F})=2$.

Par le th du rg, comme $\dim\mathbb{R}^4=4$, on en déduit que $\dim\operatorname{Im}\varphi=2$ $(=\dim\mathbb{R}^4-\dim\operatorname{Ker}\varphi=4-2)$

$\operatorname{Im}\varphi=\operatorname{Vect}(\varphi(1,0,0,0),\varphi(0,1,0,0),\varphi(0,0,1,0),\varphi(0,0,0,1))$ d'après le cours

$=\operatorname{Vect}((2,-2,0,-2),(0,0,-1,-1),(-1,1,0,1),(1,-1,1,0))$

$\underline{\mathcal{G}=((0,0,-1,-1),(-1,1,0,1))}$ est donc une famille génératrice de $\operatorname{Im}\varphi$ qui a le bon nb d'élts ($\operatorname{Card}\mathcal{G}=\dim\operatorname{Im}\varphi$) donc $\mathcal{G}$ base de $\operatorname{Im}\varphi$

③ $\varphi\circ\varphi=\varphi$ et $\varphi\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ donc $\underline{\varphi\text{ est un projecteur}}$

④ $F=3\varphi-id_E$ $\qquad F^2=F\circ F=(3\varphi-id_E)\circ(3\varphi-id_E)$

$=9\varphi\circ\varphi-3\varphi-3\varphi+id_E\circ id_E=9\varphi^2-6\varphi+id_E$

$\varphi\circ\varphi=\varphi$ $\quad=9\varphi-6\varphi+id_E=3\varphi+id_E$

d'autre part $F+2id_E=3\varphi-id_E+2id_E=3\varphi+id_E$

donc $\underline{F^2=F+2id_E\text{ et }F\text{ vérifie}}$ $(*)$.

Partie B

① f et id_E sont 2 endomorphismes de E. Toute CL d'endomorphismes de E est un endomorphisme de E car $\mathcal{L}(E)$ est un $\mathbb{R}$ ev donc
$\underline{g\text{ et }h\text{ sont des endomorphismes de }E}$.

(2) Soit $y \in \mathrm{Im}\, v$. Alors il existe $x \in E$ tq $y = v(x)$.
On applique u . On obtient $u(y) = u(v(x))$
càd $u(y) = (u \circ v)(x) = 0_E$ car $u \circ v = 0_{\mathcal{L}(E)}$
donc $y \in \mathrm{Ker}\, u$
On a montré que $\underline{\mathrm{Im}\, v \subset \mathrm{Ker}\, u}$.

(3) $g \circ h = (f - 2id_E) \circ (f + id_E) = f \circ f + f \circ id_E - 2id_E \circ f - 2id_E \circ id_E$
$= f^2 + f - 2f - 2id_E = f^2 - f - 2id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$
de même $h \circ g = (f + id_E) \circ (f - 2id_E) = f^2 - f - 2id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$ car f vérifie $(*)$
donc d'après (2) $\underline{\mathrm{Im}\, h \subset \mathrm{Ker}\, g \text{ et } \mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Ker}\, h}$.

(4) Montrons que $\mathrm{Ker}\, g \cap \mathrm{Ker}\, h = \{0_E\}$. Soit $x \in \mathrm{Ker}\, g \cap \mathrm{Ker}\, h$
$x \in \mathrm{Ker}\, g$ donc $g(x) = 0_E$ càd $f(x) - 2x = 0_E$ donc $f(x) = 2x$
et $x \in \mathrm{Ker}\, h$ donc $h(x) = 0_E$ càd $f(x) + x = 0_E$ donc $f(x) = -x$
Ainsi $2x = -x \iff 3x = 0_E \iff x = 0_E$. Donc $\mathrm{Ker}\, g \cap \mathrm{Ker}\, h \subset \{0_E\}$
De plus $\mathrm{Ker}\, g \cap \mathrm{Ker}\, h$ est un sev de E en tant qu'intersection de 2 sev de E donc $\{0_E\} \subset \mathrm{Ker}\, g \cap \mathrm{Ker}\, h$.
Concl : $\underline{\mathrm{Ker}\, g \cap \mathrm{Ker}\, h = \{0_E\}}$ (On a raisonné par double inclusion).

(5)(a)

$g = f - 2id_E$ et $h = f + id_E$

(5)(b) donc $g - h = -3id_E$ donc $\underline{id_E} = -\frac{1}{3}(g - h) = \frac{1}{3}h - \frac{1}{3}g \in \underline{\mathrm{Vect}(g, h)}$
Comme $id_E = -\frac{1}{3}g + \frac{1}{3}h$, $\forall x \in E$, $x = -\frac{1}{3}g(x) + \frac{1}{3}h(x)$.
$\forall x \in E$, $x = g(-\frac{1}{3}x) + h(+\frac{1}{3}x)$ car g et h sont linéaires
or $g(-\frac{1}{3}x) \in \mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Ker}\, h$ d'après (3)
et $h(+\frac{1}{3}x) \in \mathrm{Im}\, h \subset \mathrm{Ker}\, g$ d'après (3)
donc $\forall x \in E$, $\exists (x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}\, g \times \mathrm{Ker}\, h$ tq $x = \underbrace{x_1}_{h(+\frac{1}{3}x)} + \overbrace{x_2}^{g(-\frac{1}{3}x)}$
donc $E \subset \mathrm{Ker}\, g + \mathrm{Ker}\, h$ et $\mathrm{Ker}\, g + \mathrm{Ker}\, h \subset E$
De plus d'après (4), $\mathrm{Ker}\, g \cap \mathrm{Ker}\, h = \{0_E\}$ donc $\underline{E = \mathrm{Ker}\, g \oplus \mathrm{Ker}\, h}$

6 a Soit $x \in E$. D'après 5 b, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}\, g \times \mathrm{Ker}\, h$ tq $x = x_1 + x_2$

$(p+q)(x) = p(x) + q(x) = x_1 + x_2 = x$

car $p(x) = p(x_1 + x_2) \underset{p \text{ linéaire}}{=} p(x_1) + p(x_2) \underset{x_1 \in \mathrm{Ker}\, g \text{ et } x_2 \in \mathrm{Ker}\, h}{=} x_1 + 0_E = x_1$.

et $q(x) = q(x_1 + x_2) \underset{q \text{ linéaire}}{=} q(x_1) + q(x_2) = 0_E + x_2 = x_2$

Par ailleurs :

$q \circ p(x) = q(p(x)) = q(x_1) = 0_E$ car $x_1 \in \mathrm{Ker}\, g$

$p \circ q(x) = p(q(x)) = p(x_2) = 0_E$ car $x_2 \in \mathrm{Ker}\, h$.

Donc $p + q = id_E$, $p \circ q = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$

6 b $\forall x \in E$, $x = \overbrace{+\frac{1}{3} h(x)}^{x_1} - \overbrace{\frac{1}{3} g(x)}^{x_2}$ d'après 5 b

$\forall x \in E$, $x = (p+q)(x) = p(x) + q(x)$ d'après 6 a

et la décomposition est unique d'après 5 b

donc $x_1 = \frac{1}{3} h(x) = p(x)$ et $x_2 = -\frac{1}{3} g(x) = q(x)$.

6 c Ainsi $h = 3p$ et $g = -3q$.

$f = g + 2id_E = -3q + 2(p+q) = 2p - q = f$