Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la notation. Les trois exercices sont indépendants.

I. Exercice 1 : étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_1[X]$

$$\forall P \in \mathbb{R}_1[X]\ ,\ \varphi_1(P) = (X-a)(X-b)P' - \big(X - \frac{a+b}{2}\big)P$$

1. Démontrer que φ_1 est un endomorphisme de $\mathbb{R}_1[X]$.

2. Soit $\mathcal{B}_1 = (1, X)$ la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$. Déterminer $M_1 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\varphi_1)$.

3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que φ_1 soit bijective.

4. On suppose, dans cette question seulement, que $a \neq b$.

(a). Démontrer que la famille $\mathcal{B} = \{X-a, X-b\}$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$.

(b). Calculer $\varphi_1(X-a)$ et $\varphi_1(X-b)$ puis déduire $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_1)$.

(c). Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_1$, notée $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}$. Déterminer de même la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}$, notée $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}}$.

(d). Donner, sans démonstration, une égalité reliant les matrices M, M_1, $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}$ et $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}}$.

(e). Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer M^p puis en déduire, grâce à la question 4.(d), une expression de M_1^p (on donnera l'expression de chacun des coefficients de cette matrice).

5. On s'intéresse dans cette question à l'ensemble $\Gamma = \{\alpha I_2 + \beta M_1 + \gamma M_1^2 + \delta M_1^3\ ,\ (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4\}$.

(a). Démontrer que Γ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(b). Prouver que les matrices M_1^2 et M_1^3 sont des combinaisons linéaires de M_1 et I_2.

(c). Déterminer une base de Γ.

6. On suppose dans cette question que $a = 4$ et $b = 2$. En utilisant les résultats de la question 5.(b), déterminer l'application φ_1^2. En déduire la nature de φ_1 et préciser ses éléments caractéristiques (on donnera une base de chacun des deux espaces vectoriels concernés).

II. Exercice 2 : étude de la nature et de la somme de séries

Les deux questions sont indépendantes.

1. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On s'intéresse à la série $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.
   (a) Cette série est-elle absolument convergente ? Justifiez votre réponse.
   (b) Montrer que cette série est convergente. On note ℓ sa somme.
   (c) Soit $n \geq 1$, on pose $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $T_{2n} = H_{2n} - H_n$.
   (d) On admet qu'il existe un réel γ tel que pour tout $n \geq 1$, $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$. Déterminer ℓ.
2. Soit p un entier naturel fixé. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = \dfrac{1}{\binom{n+p}{n}}$
   (a) Montrer que si $p = 0$ ou si $p = 1$ alors la série de terme général u_n diverge.
   (b) On suppose dans toute la suite que p est un entier supérieur ou égal à 2, et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.
      i. Montrer que pour tout n entier, $(n + p + 2)u_{n+2} = (n + 2)u_{n+1}$.
      ii. En déduire à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
      $$S_n = \frac{1}{p-1}(1 - (n + p + 1)u_{n+1}).$$
   (c) On pose $v_n = (n + p)u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
      i. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
      ii. En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite ℓ est positive ou nulle.
      iii. Utiliser les résultats précédents pour montrer que la série de terme général u_n converge et donner sa somme en fonction de p et de ℓ.
   (d) On suppose, dans cette question seulement, que $\ell \neq 0$.
      i. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $u_n \sim \frac{\ell}{n}$.
      ii. En déduire une contradiction.
   (e) Donner la valeur de ℓ et en déduire, en fonction de p, la somme de la série de terme général u_n.

III. Exercice 3 : dénombrement

Ce problème est constitué d'une série de questions indépendantes. On répondra aux questions en formalisant les résultats.

1. Une classe de terminale de 35 élèves est composée de 16 filles et de 19 garçons.
   (a) De combien de façons peut-on faire entrer les élèves un par un dans la classe ?
   (b) Il y a une place convoitée par tous les élèves : au premier rang, à côté du radiateur. Sachant que les élèves sont replacés à chaque heure, combien y a-t-il de façons d'occuper cette place pendant les 9 heures de maths de la semaine ?
   (c) La première rangée est composée de 8 places. Combien y a-t-il de façons de composer cette première rangée avec les élèves de la classe ?
   (d) Pour créer une association d'élèves, on a besoin d'un bureau composé de 8 élèves. Combien de bureaux peut-on former dans cette classe ?
   (e) Combien y a-t-il de façons de composer cette première rangée avec les élèves de la classe de sorte qu'il y ait autant de filles que de garçons ?
2. Tirages de cartes.
   On tire sans remise 5 cartes d'un jeu de 52 cartes. On appelle 'main' un tel tirage, pour lequel on en tient pas compte de l'ordre.
   (a) Quel est le nombre total de mains ? On justifiera la réponse en formalisant.
   (b) Soit A l'ensemble des mains possédant exactement deux rois et B l'ensemble des mains possédant exactement trois coeurs. Déterminer le cardinal de A, de B, de $A \cap B$ et de $A \cup B$.
   (c) Dénombrer l'ensemble des mains contenant un brelan (trois cartes de même hauteur et deux cartes de hauteurs différentes et différentes entre elles). On appelle hauteur la valeur d'une carte : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, V, D ou R.
3. Codes.
   Le code antivol d'un vélo est un nombre de cinq chiffres, chaque chiffre pouvant prendre l'une des dix valeurs : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9. Ainsi 00035 est un code possible.
   (a) Quel est le nombre de codes possibles ?
   (b) Quel est le nombre de codes formé de cinq chiffres distincts ?
   (c) Le propriétaire du vélo sait que son code contient les chiffres 1, 2 et 3 dans cet ordre et à la suite, mais il a oublié les autres chiffres. Il sait cependant que ces deux autres chiffres sont différents l'un de l'autre mais aussi différents de 1, 2 et 3. Quel nombre maximal d'essais infructueux peut-il faire avant de retrouver son code ?
   (d) Même question si le propiétaire du vélo sait que les cinq chiffres du code sont 1, 9, 9, 9 et 5 mais qu'il a oublié l'ordre des chiffres.
4. Nombre de parties.
   Soient k, p et n trois entiers vérifiant que $0 \leq k \leq p \leq n$. Dénombrer de deux façons différentes l'ensemble des couples (A, B) où A et B sont des parties d'un ensemble E de cardinal n vérifiant :

$$A \subset B \text{ et } \operatorname{Card}(A) = k \text{ et } \operatorname{Card}(B) = p.$$

   On pourra par exemple dans une première façon de procéder choisir A puis B et dans une deuxième façon choisir B puis A. Quelle formule obtenez-vous ?