Chapitre 29 : Espaces probabilisés - Indépendance et conditionnement

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne peut prévoir le résultat. C'est la cas lors du lancer d'un dé (alea signifie dé en latin). L'expérience doit de plus être reproductible et on doit en connaître toutes les issues (c'est-à-dire tous les résultats possibles). Le programme nous limite au cas où le nombre de résultats possibles est fini.

1 Expérience aléatoire et univers

Définition 1 (Univers).

L'ensemble des issues (ou résultats possibles ou réalisations) d'une expérience aléatoire est appelé ***univers****. L'univers est souvent noté Ω.*

► Exemple : cas du lancer d'un dé classique à faces, d'une pièce de monnaie.

Définition 2 (Evénements).

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω. Un ***événement*** *est un sous-ensemble de Ω.*
Ω est l'événement ***certain*** *et $\emptyset$ est l'événement* ***impossible****.*
Un événement qui est un singleton est appelé ***événement élémentaire****.*
Si A et B sont deux événements, l'événement $A \cup B$ est appelé "'A ***ou*** *B"' et l'événement $A \cap B$ est appelé "'A* ***et*** *B"'.*
Lorsque les deux événements A et B sont disjoints (c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$), on dit qu'ils sont ***incompatibles****. Ces deux événements ne peuvent pas être réalisés simultanément.*
Le complémentaire de A dans Ω est appelé ***événement contraire*** *de A. On le note $\bar{A}$.*
On appelle ***système complet d'événements*** *tout ensemble fini d'événements 2 à 2 incompatibles, et dont la réunion est égale à Ω. Autrement dit, $(A_i)_{i \in [[1,n]]}$ est un* ***système complet d'événements*** *(ou partition) si, et seulement si :*
- *pour tout $i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$,*
- *$\cup_{i \in [[1,n]]} A_i = \Omega$.*

Remarque 1. *Deux événements contraires sont incompatibles mais la réciproque est fausse.*
On peut définir un événement par une propriété caractéristique. Par exemple, dans le cas d'un lancer de dé, l'événement $A = \{3, 6\}$ correspond à la propriété : "'obtenir un multiple de 3"'.

► Exemple : On tire un objet dans une urne qui contient des boules et des cubes, de couleur verte ou bleue. Donner deux systèmes complets d'événements.

2 Espaces probabilisés finis

Définition 3 (Probabilité sur un univers fini Ω).

Une probabilité sur un univers fini Ω est une application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$ vérifiant :
- *$P(\Omega) = 1$ et*
- *pour toutes parties disjointes A et B de Ω, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.*

En particulier si A et B sont deux parties non disjointes de Ω, $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$.

Définition 4 (Espace probabilisé fini).

Un espace probabilisé fini est un couple (Ω, P) où Ω est un univers fini et P une probabilité sur Ω.

$(\{Pile, Face\}, P_1)$ et $(\{Pile, Face\}, P_2)$ sont deux espaces probabilisés associés à l'expérience aléatoire de lancer d'une pièce, où P_1 est définie par $P_1(\{Pile\}) = P_1(\{Face\}) = \dfrac{1}{2}$ et où P_2 est définie par $P_2(\{Pile\}) = \dfrac{1}{3}$ et $P_2(\{Face\}) = \dfrac{2}{3}$.

Propriété 1 (Probabilité d'une réunion, de l'événement contraire).

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et A et B deux événements quelconques de l'univers Ω.

1. $0 \leq P(A) \leq 1$,
2. *Si $A_1, \cdots, A_n$ sont n événements deux à deux incompatibles alors* $P\left(\cup_{k=1}^{n} A_k\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(A_k)$.
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,
4. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$,
5. $P(\emptyset) = 0$.

Propriété 2 (Images des singletons).

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

En effet, si $A = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ alors $P(A) = P(\{\omega_1\} \cup \cdots \cup \{\omega_n\}) = P(\{\omega_1\}) + \cdots + P(\{\omega_n\})$ puisque deux éléments élémentaires distincts sont incompatibles. On en déduit la propriété ci-dessous.

Propriété 3.

La somme des probabilités des éléments élémentaires est égale à 1.

Propriété 4 (Caractérisation d'une probabilité sur un univers dénombrable).

Soit I un ensemble de la forme $\{1, \cdots, n\}$. Soit $\Omega = \{\omega_i \mid i \in I\}$. Si $(p_i)_{i\in I}$ est une famille de réels positifs ou nuls dont la somme vaut 1, alors il existe une et une seule probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que $P(\{\omega_i\}) = p_i$ pour tout $i \in I$. La réciproque de cette propriété est vraie.

Remarque 2. *Soit $E \subset \mathbb{N}$. Une distribution de probabilités sur un ensemble E est une famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$ indexée par E et de somme 1. Une distribution de probabilités sur un ensemble fini est une famille de réels positifs indexée par cet ensemble et de somme 1. Une probabilité P sur Ω est déterminée par la distribution de probabilités $(P(\omega))_{\omega\in\Omega}$.*

Propriété 5 (Croissance de la probabilité).

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et A et B deux événements quelconques de l'univers Ω.
Alors si $A \subset B$, $P(A) \leq P(B)$.

Définition 5 (Equiprobabilité ou probabilité uniforme).

*Deux événements sont dits **équiprobables** lorsqu'ils ont la même probabilité.*
*Soit une expérience aléatoire et (Ω, P) un espace probabilisé fini associé, avec $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$. On dit qu'il y a **équiprobabilité** lorsque tous les événements élémentaires sont équiprobables, c'est-à-dire lorsque $P(\{\omega_1\}) = \cdots = P(\{\omega_n\})$. On parle aussi de **probabilité uniforme**.*

► Exemple : les boules sont **indiscernables au toucher**...

Propriété 6 (Probabilité d'un événement élémentaire dans le cas d'équiprobabilité).

Soit l'univers $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_p\}$ lié à une expérience aléatoire. Dans le cas d'équiprobabilité, la probabilité de chaque événement élémentaire est $\frac{1}{p}$.

▶ Exemple : On lance trois fois de suite une pièce de monnaie que l'on sait **parfaitement bien équilibrée**. Quel est l'univers associé à cette expérience aléatoire ? Quelle est la probabilité de chacun des événements élémentaires ? Soit un univers Ω associé à une expérience aléatoire avec $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$. On considère un événement $A = \{\omega_{i_1}, \cdots, \omega_{i_k}\}$, où chaque ω_{i_k} est un élément de Ω. On a $P(A) = \sum_{j=1}^{k} P\left(\omega_{i_j}\right) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n} = \frac{k}{n} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$. On dit que $\text{Card}(A)$ est le nombre de cas favorables et que $\text{Card}(\Omega)$ est le nombre total de cas. Le calcul de la probabilité se tranforme alors en problème de dénombrement.

Propriété 7 (Probabilité d'un événement dans le cas d'équiprobabilité).

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et A un événement quelconque de l'univers Ω.
Dans le cas de l'équiprobabilité, $P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{\text{nb de cas favorables}}{\text{nb de cas possibles}}$.

▶ Exemple : On tire une carte dans un jeu de 32 cartes **bien mélangé**. Quelle est la probabilité d'obtenir un pique ?
▶ Exemple : On lance un dé **non truqué**. Quelle est la probabilité d'obtenir un entier inférieur ou égal à 2 ?
▶ Exemple : On tire **au hasard** un ensemble de 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité que la main contienne au moins un as ?

Remarque 3 (Fréquence et probabilité, loi empririque des grands nombres)**.** *On considère une expérience aléatoire qu'on répète un grand nombre de fois et un événement A lié à cette expérience. Si on observe l'évolution de la fréquence de réalisation de l'événement A au fur et à mesure que le nombre d'expériences augmente, on constate une fluctuation de moins en moins grande de cette fréquence : la fréquence se stabilise. La fréquence de réalisation de l'événement A au cours d'une suite de n expériences semble admettre une limite qui ne dépend pas de cette suite de n expériences lorsque le nombre n d'expériences tend vers l'infini (stabilisation vers la même valeur pour différentes suites de répétition de la même expérience). C'est ce que l'on appelle la **loi empirique des grands nombres**. C'est à partir de cette constatation expérimentale que s'est développée la théorie des probabilités.*

3 Probabilités conditionnelles

3.1 Introduction-Changement d'univers

Un enquêteur fait un sondage auprès de famille ayant deux enfants. On suppose que les naissances des filles et des garçons sont équipropables. Ecrire les quatre types de fratries possibles ainsi que leur probabilité. Il sonne à la porte de la maison d'une de ces familles. Une petite fille vient ouvrir. Quelle est alors la probabilité que l'autre enfant soir un garçon ? Dès lors qu'il a vu la petite fille, l'univers de l'expérience menée par l'enquêteur s'est transformé. On note Ω l'univers initial et Ω' le nouvel univers. Expliciter Ω et Ω'. La probabilité sur l'univers se tranforme également. Sur Ω était définie la probabilité uniforme définie par $\forall \omega \in \Omega,\ P(\{\omega\}) = \frac{1}{4}$. Quelle est la probabilité uniforme P' définie sur Ω' ? Soit A l'événement "'l'autre enfant est un garçon"', c'est-à-dire "'la fratrie est mixte"'. Quelle probabilité l'enquêteur attribue-t-il à cet événement avant le coup de sonnette ? après ? Il n'est en fait pas correct de noter A, l'événement précédent comme événement de l'espace probabilisé (Ω, P) et comme événement de l'espace probabilisé (Ω', P'). Mais l'exemple montre que l'information "'la fratrie comprend une fille"' a modifié à la fois l'univers et la probabilité de l'événement "'la fratrie est mixte"'. On dit que l'événement B : "'la fratrie comprend une fille"' a **conditionné** l'espace probabilisé (Ω, P). Intéressons-nous maintenant au lien entre P et P'. On remarque que Ω' n'est autre que l'événement B. Ainsi les deux issues (F, G) et (G, F) sont les deux issues de Ω réalisant A et B et donc
$P'(A) = \frac{2}{3} = \frac{\text{nb de cas favorables à } A \cap B}{\text{nb de cas favaorables à } B} = \frac{P(A \cap B)\text{Card}(\Omega)}{P(B)\text{Card}(\Omega)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

3.2 Probabilité conditionnelle

Définition 6 (Probabilité conditionnelle).

On considère un espace probabilisé (Ω, P) et un événement B de probabilité non nulle.
On appelle ***probabilité conditionnelle en** B* *ou* ***probabilité conditionnelle sachant que** B **est réalisé**, la probabilité P_B définie par :*
$\forall A \in \Omega,\ P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
Le nombre $P_B(A)$ se note aussi $P(A|B)$ et s'appelle ***probabilité conditionnelle de** A **sachant** B.*

Vérifier que l'application $P_B = P(.|B)$ définit une probabilité sur l'univers Ω. Elle possède donc toutes les propriétés d'une probabilité. En particulier,
$P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$,
si A_1 et A_2 sont deux événements quelconques, $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1 \cap A_2|B)$, et si $A_1, \cdots, A_n$ sont n événements deux à deux incompatibles, $P(A_1 \cup \cdots \cup A_n|B) = P(A_1|B) + \cdots + P(A_n|B)$.

► Exemple : Un jeu de cartes comprend 32 cartes. On en distribue cinq prises au hasard à chacun des joueurs X et Y. Calculer la probabilité que X ait au moins un as. Sachant que Y a exactement un as, calculer la probabilité que X ait un as au moins. Que constate-t-on ?

4 Evénements indépendants

4.1 Introduction

4.2 Indépendance

La relation $P(A|B) = P(A)$ s'écrit $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, ce qui montre que A et B jouent des rôles symétriques et permet de donner une définition valable aussi dans le cas où $P(B) = 0$.

Définition 7 (Evénements indépendants).

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et deux événements A et B. (A, B) est un couple d'événements ***indépendants*** *si et seulement si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. On dit aussi simplement que A et B sont deux événements indépendants.*

Propriété 8.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Si $P(B) > 0$, alors A et B sont indépendants si et seulement si $P(A|B) = P(A)$.

Remarque 4. *La définition précédente se généralise au cas de n événements : on parle alors d'****indépendance deux à deux*** *lorsque la réalisation ou la non réalisation de l'un des événements ne modifie rien pour un autre. Ce concept d'indépendance deux à deux doit être distingué de ce que l'on appelle l'****indépendance mutuelle****, qui traduit qu'un renseignement sur certains des événements, quels qu'ils soient, n'implique rien pour certains autres événéments. Lorsque $n \geq 3$ ces deux concepts ne coïncident pas.*

Un événement de probabilité nulle est indépendant de tout autre événement ($P(A \cap B) \leq P(A)$ et $P(A \cap B) \leq P(B)$).

► Exemple : Dix-huit chevaliers anglais et douze chevaliers français prennent part au tournoi du Prince Noir. On observe que six Anglais sont gauchers ainsi que quatre français. On prend un chevalier au hasard, on note A l'événement "'le chevalier est anglais"' et G l'événement "'le chevalier est gaucher"'. Montrer que A et G sont indépendants.

Définition 8 (Famille finie d'événements mutuellement indépendants).

Soit (Ω, P) un espace probabilisé. On dit que n événements $A_1, \cdots, A_n$ sont ***mutuellement indépendants*** *si et seulement si*
$\forall k \in [[1, n]],\ \forall (i_1, \cdots, i_k) \in [[1, n]]^k$, *les indices $i_1, \cdots, i_k$ étant 2 à 2 distincts :*
$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$, *c'est-à-dire si et seulement si toute intersection d'un nombre quelconque d'entre eux a pour probabilité le produit des probabilités de chacun.*

Propriété 9.

L'indépendance mutuelle de n événements entraîne leur indépendance deux à deux.
Attention, l'indépendance deux à deux de n événements n'entraîne pas leur indépendance mutuelle si $n \geq 3$.

Démonstration : il suffit de choisir $k = 2$ dans la définition.

► Exemple : On reprend l'exemple de l'enquête sur les familles de deux enfants. L'univers est $\Omega = \{(G, G), (G, F), (F, G), (F, F)\}$. Soit A l'événement "'la fratrie est mixte"', B : "'l'enfant aîné est une fille"' et C : "'le cadet est un garçon"'. Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$, $P(B \cap C)$, $P(A \cap B \cap C)$ et $P(A|B \cap C)$. En déduire que A, B et C sont indépendants deux à deux mais pas mutuellement indépendants.

5 Trois théorèmes fondamentaux

Théorème 1 (Formule des probabilités composées).

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $A_1, \cdots, A_n$ n événements tels que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$.
Alors $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A1 \cap A_2) \cdots P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$.

Comme P est croissante, l'hypothèse $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$ entraîne les relations $P(A_1) \neq 0$, $P(A_1 \cap A_2) \neq 0 ... P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-2}) \neq 0$. Ceci justifie l'existence des différentes probabilités conditionnelles du produit dans le second membre de l'égalité.

► Exemple : Dans une ville, une contractuelle qui met un PV un jour donné, entre 14h et 16h, met un PV le lendemain entre 14h et 16h avec la probabilité 0.4. Si elle ne met pas de PV ce jour-là entre 14h et 16h, elle en met un le lendemain entre 14h et 16h avec la probabilité 0.7. Cette contractuelle a mis un PV le lundi entre 14h et 16h. Quelle est la probabilité qu'elle en mette un autre le jeudi entre 14h et 16h ?
Représenter les différentes issues dans un arbre : où on fera apparaître les journées du lundi au jeudi, avec les deux éventualités : un PV ou pas de PV. Plus précisément, on numérotera 1,2,3 et 4 les jours lundi, mardi, mercredi et jeudi. On notera V_i, respectivement $\bar{V_i}$, l'événement "'la contractuelle verbalise le jour i"', respectivement "'la contractuelle ne verbalise pas le jour i. On rappelle que le résultat le long d'un chemin dans le graphe en arbre est donné par le produit des probabilités conditionnelles que l'on y rencontre.

Théorème 2 (Formule des probabilités totales).

Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles et si B est un événement, alors

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B|A_k)P(A_k)$$

. En particulier, si A est un événement de probabilité non nulle tel que $P(\bar{A}) \neq 0$, $P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})$.

Ce théorème permet de calculer la probabilité d'un événement en fonction de probabilités conditionnelles concernant cet événement.

► Exemple : Deux joueurs X et Y s'entrainent au tir à la cible. L'un des joueurs, X, est adroit et, lorsqu'il tire, atteint la cible 9 fois sur 10. L'autre, Y, est débutant et n'atteint la cible que 6 fois sur 10. X laisse Y s'entraîner, et n'effectue qu'un tir sur trois.

Question : Quelle est la probabilité que la cible soit atteinte ?

Théorème 3 (Formules de Bayes).

Soit (Ω, P) un espace probabilisé.

1. *Si A et B sont deux événements tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$ alors* $P(A|B) = \dfrac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$.
2. *Si $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles et si B est un événement de probabilité non nulle, alors*
$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}.$$

Les différents événements (A_i) s'excluent les uns des autres et l'un deux est réalisé à coup sûr. Ils définissent des conditions de réalisation de l'expérience aléatoire et doivent être envisagés commes des **causes** des évenements qui se produisent ultérieurement, pendant l'expérience aléatoire. B est l'un de ces événements ultérieurs. Il faut l'envisager comme un **effet** des événements (A_i). La probabilité $P(A_i|B)$ s'interprête comme la probabilité que ce soit la cause A_i qui se soit produite sachant que l'effet B a eu lieu. Ce conditionnement remonte donc le cours naturel de l'expérience aléatoire, alors que les probabilités $P(B|A_i)$ font intervenir la probabilité que B se réalise, sachant que l'une des causes A_i est réalisée. Ces probabilités vont donc dans le sens chronologique de l'expérience. Cette formule est donc aussi appelée **formule de probabilité des causes**, elle peut être vue comme une formule à remonter le temps !

► Exemple : Reprendre l'exercice précédent avec la question suivante : Un des joueurs tire et la cible est atteinte. Quelle est la probabilité que ce soit par Y ?

► Exemple : Un test permet de détecter si une pièce est défectueuse. Il n'est cependant pas fiable absolument. Ce test donne pour défectueuse une pièce défectueuse dans 95 cas sur 100, et pour non défectueuse une pièce saine dans 90 cas sur 100. Un lot de 100 pièces contient 8 de pièces défectueuses. On prend une des pièces du lot au hasard. La pièce choisie est déclarée défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle le soit vraiment ?