Chapitre 28 : Déterminant

Introduction

Le déterminant fut initialement introduit en algèbre, pour déterminer si un système d'équations linéaires comportant autant d'équations que d'inconnues admettait une unique solution. Il s'est révélé être un outil très puissant dans de nombreux domaines (étude du déterminant d'un endomorphisme et recherche de ses valeurs propres, définition du déterminant de certaines familles de vecteurs, déterminant d'une matrice carrée). Comme pour de nombreuses opérations, le déterminant peut être défini par une collection de propriétés qu'on résume par le terme 'forme n-linéaire alternée'. Cette définition permet d'en faire une étude théorique complète et d'élargir encore ses champs d'applications. Mais le déterminant peut aussi se concevoir comme une généralisation à l'espace de dimension n de la notion de surface ou de volume orientés. Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \geq 2$.

1 Déterminant de deux vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension 2

Définition 1 (Forme bilinéaire).

Soient E un K-espace vectoriel et $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$. On dit que φ est une ***forme bilinéaire*** *sur E lorsque*

1. *φ est linéaire* ***à gauche****, c'est-à-dire par rapport à sa première variable :*

$$(\forall x, x_1, x_2 \in E) \quad (\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}) \ \varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, x) = \lambda_1 \varphi(x_1, x) + \lambda_2 \varphi(x_2, x)$$

2. *et φ est linéaire* ***à droite****, c'est-à-dire par rapport à sa deuxième variable :*

$$(\forall x, x_1, x_2 \in E) \quad (\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}) \ \varphi(x, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \varphi(x, x_1) + \lambda_2 \varphi(x, x_2)$$

▶ Exemples :

1. Soit $\varphi : \ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto 5x_1x_2 - 3y_1y_2$. Montrer que φ est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$.
2. Dans le plan euclidien, le produit scalaire et le déterminant sont deux formes bilinéaires. Dans l'espace euclidien, le produit scalaire est une forme bilinéaire, le produit vectoriel est une application bilinéaire.
3. Soit $\varphi : \ \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \ (u, v) \mapsto \displaystyle\int_0^1 u(t)v(t)\mathrm{d}t$ est une forme bilinéaire sur $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{On note } \mathcal{L}_2(E, \mathbb{K}) \text{ l'ensemble des formes bilinéaires sur } E.}$$

Propriété 1.

L'ensemble $\mathcal{L}_2(E, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E^2, \mathbb{K})$.

Propriété 2.

Soit φ une forme bilinéaire sur E.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de E.

1. $\forall x_1, x_2 \in E, \quad \varphi(x_1, 0_E) = \varphi(0_E, x_2) = 0_{\mathbb{R}}$
2. *Si x et y sont deux vecteurs de E tels que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ alors*

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \varphi(e_i, e_j)$$

Définition 2 (Forme bilinéaire alternée).

Soit $\varphi : E^2 \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire.
On dit que φ est ***alternée*** *lorsque $\forall x \in E \ \varphi(x, x) = 0$.*

Définition 3 (Forme bilinéaire antisymétrique).

Soit $\varphi : E^2 \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire.
On dit que φ est ***antisymétrique*** *lorsque $\forall x, y \in E \quad \varphi(x, y) = -\varphi(y, x)$.*

Propriété 3.

Soit φ une forme bilinéaire sur E. φ est alternée si et seulement si elle est antisymétrique.

► Exemple : Le déterminant est une forme bilinéaire alternée dans le plan. Le produit scalaire n'est pas une forme bilinéaire alternée.

Propriété 4.

Soit (u, v) une famille ***liée*** *de E, et φ une forme bilinéaire alternée sur E. $\varphi(u, v) = 0$.*

$$\boxed{\text{On note } \mathcal{A}_2(E, \mathbb{K}) \text{ l'ensemble des formes bilinéaires alternées sur } E.}$$

Propriété 5 (Forme bilinéaire alternée sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2).

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, φ une forme bilinéaire alternée sur E et $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ et $y = y_1 e_1 + y_2 e_2$ deux vecteurs de E. Alors

$$\varphi(x, y) = (x_1 y_2 - x_2 y_1)\,\varphi(e_1, e_2)$$

On en déduit que

1. *il existe une unique forme bilinéaire alternée φ_0 sur E telle que $\varphi_0(e_1, e_2) = 1$,*
2. *toute forme bilinéaire alternée sur E est proportionnelle à φ_0,*
3. *$\mathcal{A}_2(E, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_2(E, \mathbb{K})$ de dimension 1.*

Définition 4 (Déterminant de deux vecteurs en dimension 2).

Soit E un $\mathbb{K}$espace vectoriel de dimension 2 rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.
L'unique forme bilinéaire alternée φ_0 sur E vérifiant $\varphi_0(e_1, e_2) = 1$ s'appelle déterminant dans la base $\mathcal{B}$. On la note $\det_{\mathcal{B}}$.

Si $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ et $y = y_1 e_1 + y_2 e_2$ sont deux vecteurs de E, on a $\det_{\mathcal{B}}(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1$.

2 Déterminant de trois vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension 3

Définition 5 (Forme trilinéaire).

*Soient E un K-espace vectoriel et $\varphi : E \times E \times E \to \mathbb{K}$. On dit que φ est une **forme trilinéaire** sur E lorsque pour tous vecteurs u, v, w, x de E et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a*

$$\varphi(u + \lambda x, v, w) = \varphi(u, v, w) + \lambda\varphi(x, v, w)$$

$$\varphi(u, v + \lambda x, w) = \varphi(u, v, w) + \lambda\varphi(u, x, w)$$
$$\varphi(u, v, w + \lambda x) = \varphi(u, v, w) + \lambda\varphi(u, v, x)$$

On note $\mathcal{L}_3(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des formes trilinéaires sur E.

Propriété 6.

L'ensemble $\mathcal{L}_3(E, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}\left(E^3, K\right)$.

Propriété 7.

Soit φ une forme trilinéaire sur E.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de E.

1. $\forall x_1, x_2, x_3 \in E, \quad \varphi(x_1, x_2, 0) = \varphi(x_1, 0, x_2) = \varphi(0, x_1, x_2) = 0$
2. *Si x, y et z sont trois vecteurs de E tels que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ et $z = \sum_{i=1}^{n} z_i e_i$ alors*

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j, \sum_{k=1}^{n} z_k e_k\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_i y_j z_k \varphi(e_i, e_j, e_k)$$

Définition 6 (Forme trilinéaire alternée).

Soit $\varphi : E^3 \to \mathbb{K}$ une forme trilinéaire.
*On dit que φ est **alternée** lorsque pour tous vecteurs u, v, w de E, si deux de ces vecteurs sont égaux, alors $\varphi(u, v, w)$ est nul.*

Définition 7 (Forme trilinéaire antisymétrique).

Soit $\varphi : E^3 \to \mathbb{K}$ une forme trilinéaire.
*On dit que φ est **antisymétrique** lorsque pour tout vecteur u, v, w de E :*

$$\varphi(u, v, w) = -\varphi(u, w, v)$$

$$\varphi(u, v, w) = -\varphi(v, u, w)$$
$$\varphi(u, v, w) = -\varphi(w, v, u)$$

(autrement dit, φ est changée en son opposé lorsqu'on échange deux vecteurs)

Propriété 8.

Soit φ une forme trilinéaire sur E. φ est alternée si et seulement si elle est antisymétrique.

Propriété 9.

*Soit (u, v, w) une famille **liée** de E, et φ une forme trilinéaire alternée sur E. $\varphi(u, v, w) = 0$.*

$$\boxed{\text{On note } \mathcal{A}_3(E,\mathbb{K}) \text{ l'ensemble des formes trilinéaires alternée sur } E.}$$

Propriété 10 (Forme trilinéaire alternée sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3).

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, φ une forme trilinéaire alternée sur E et $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$ et $z = z_1e_1 + z_2e_2 + z_3e_3$ sont trois vecteurs de E. Alors

$$\varphi(x, y, z) = (x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + z_1x_2y_3 - z_1y_2x_3 - x_1y_3z_2 - y_1x_2z_3)\,\varphi(e_1, e_2, e_3)$$

On en déduit que

1. *il existe une unique forme trilinéaire alternée φ_0 sur E telle que $\varphi_0(e_1, e_2, e_3) = 1$,*
2. *toute forme trilinéaire alternée sur E est proportionnelle à φ_0,*
3. *$\mathcal{A}_3(E,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_3(E,\mathbb{K})$ de dimension 1.*

Définition 8 (Déterminant de trois vecteurs en dimension 3).

Soit E un $\mathbb{K}$espace vectoriel de dimension 3 rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
L'unique forme trilinéaire alternée φ_0 sur E vérifiant $\varphi_0(e_1, e_2, e_3) = 1$ s'appelle déterminant dans la base $\mathcal{B}$.
On la note $\det\limits_{\mathcal{B}}$.

Si $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$ et $z = z_1e_1 + z_2e_2 + z_3e_3$ sont trois vecteurs de E, on a $\det\limits_{\mathcal{B}}(x, y) = (x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + z_1x_2y_3 - z_1y_2x_3 - x_1y_3z_2 - y_1x_2z_3)$.
Règle de Sarrus :
Soit $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe de l'espace E et trois vecteurs du plan $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}_B$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}_B$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}_B$ Alors $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3 + x_3y_1z_2 + x_2y_3z_1 - x_3y_2z_1 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3$ (Règle de Sarrus)

3 Groupe symétrique

3.1 Rappels

On a vu dans le chapitre 12 la définition suivante.

Définition 9 (Groupe des permutations).

Si X est un ensemble, on appelle groupe des permutations de X (ou groupe symétrique de X) l'ensemble des bijections de X vers X. On le note S_X. $(S_X, \circ)$ est un groupe.
Cas particulier : lorsque $X = \{1, 2, \cdots, n\}$, avec $n \geq 2$, on note $S_X = S_n$ et S_n a $n!$ éléments.
$(S_n, \circ)$ est un groupe. Si $n \geq 3$, S_n n'est pas commutatif.
La composée de deux permutations ϕ et ϕ' se note $\phi\phi'$.

Toute permutation ϕ peut se noter ainsi :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \phi(1) & \phi(2) & \cdots & \phi(n) \end{pmatrix}$$

Définition 10 (p-cycle - Support).

Soit $p \geq 2$ et $a_1, \cdots a_p$ p éléments distincts de $[[1, n]]$.
Soit σ l'application définie de $[[1, n]]$ vers $[[1, n]]$ par :
. *si* $x \in [[1, n]] \setminus \{a_1, \cdots, a_p\}$, $\sigma(x) = x$,
. *si* $i \in [[1, p-1]]$, $\sigma(a_i) = a_{i+1}$,
. $\sigma(a_p) = a_1$.
σ est une permutation de $[[1, n]]$ notée $(a_1\ a_2\ \cdots\ a_p)$.
Cette permutation est appelée p-cycle ou cycle d'ordre p.
On dit que σ a pour support l'ensemble $a_1, \cdots, a_p$.

Le support d'un cycle d'ordre p noté σ est donc l'ensemble des éléments k de $[[1, n]]$ tels que $\sigma(k) \neq k$. Par exemple, $(1\ 3\ 5\ 2)$ est un 4-cycle de $[[1, 8]]$.

Définition 11 (Transposition).

On appelle transposition un 2-cycle de S_n.

Il existe donc deux éléments i et j de $[[1, n]]$ tels que $i \neq j$ et $\sigma(i) = j$ et $\sigma(j) = i$. Une transposition est une involution.

► Exemple : : Déterminer S_2 et S_3.
► Exemple : : Si $p \geq 2$ et si $i_1, \cdots, i_p$ sont des éléments de $[[1, n]]$ distincts alors $(i_1, i_2)(i_2 i_3) \cdots (i_{p-1} i_p) = (i_1 i_2 \cdots i_p)$. En déduire $(12)(24)(46)$.

3.2 Décomposition d'une permutation

Propriété 11.

Soit $\sigma \in S_n$, soit $x \in [[1, n]]$. Il existe un entier naturel non nul p tel que $x, \sigma(x), \cdots, \sigma^{p-1}(x)$ sont distincts et $\sigma^p(x) = x$.

Définition 12 (Relation binaire).

Soit σ une permutation de $[[1, n]]$. On définit sur $[[1, n]]$ la relation binaire R suivante :
$i_1\ R\ i_2$ ssi $\exists \mathbb{K} \in \mathbb{Z}$ $i_2 = \sigma^k(i_1)$.

Propriété 12 (Relation d'équivalence - Classes d'équivalence).

- *R est une relation d'équivalence.*
- *La classe d'équivalence de x pour R est l'ensemble $\{x, \sigma(x), \cdots, \sigma^{p-1}(x)\}$. Cette classe d'équivalence est appelée orbite de x.*

Propriété 13 (Decomposition d'une permutation).

- *Deux cycles à supports disjoints commutent.*
- *Tout élément de S_n autre que l'identité se décompose de manière unique à l'ordre des facteurs près en un produit de cycles à supports deux à deux disjoints.*
- *Tout élément de S_n est un produit de transpositions*

Décomposer en produit de cycles à supports disjoints : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 6 & 9 & 1 & 3 & 8 & 4 & 10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ et $(1352)(2417)(58)$.

3.3 Signature

Théorème 1 (Signature).

Il existe un unique morphisme de groupes de S_n dans $\{-1, 1\}$ envoyant toute transposition sur -1.
On appelle signature cette application. Si σ est un élément de S_n alors la signature de σ se note $\epsilon(\sigma)$.

Démonstration non exigible.
Si $\sigma = \tau_1\ \tau_2\ \tau_p$ (décomposition en produit de transpositions - pas d'unicité) alors $\epsilon(\sigma) = (-1)^p$.
Si $\sigma = c_1\ c_2\ c_p$ (décomposition en produit de cycles - unicité) alors $\epsilon(\sigma) = (-1)^a$. où $a = \sum_{i=1}^{p}(p_i - 1)$ où p_i est la longueur du cycle c_i.
Déterminer la signature de $(1,2)(3,4)(5,6)$, de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 6 & 9 & 1 & 3 & 8 & 4 & 10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.
On retient que pour déterminer la signature d'une permutation, on la décompose en produit de cycles disjoints.

4 Formes p-linéaires alternées

Définition 13 (Forme p-linéaire).

*Soient E un K-espace vectoriel et $\varphi : E^p \to \mathbb{K}$. On dit que φ est une **forme p-linéaire** sur E lorsque :*
$\forall (x_1, \cdots, x_p) \in E^p,\ \forall i \in [[1,p]],\ x \mapsto \varphi(x_1, \cdots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, x_p)$ *est une forme linéaire.*

On note $\mathcal{L}_p(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des formes p-linéaires sur E.

Propriété 14.

L'ensemble $\mathcal{L}_p(E, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E^p, K)$.

Propriété 15.

Soit φ une forme p-linéaire sur E.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de E.
Si $\forall (x_1, \cdots, x_p)$ sont des vecteurs de E tels que $x_1 = \sum_{i=1}^{n} x_{i,1}e_i$, ... et $x_p = \sum_{i=1}^{n} x_{i,p}e_i$ alors

$$\varphi(x_1, \cdots, x_p) = \sum_{(i_1, \cdots, i_p) \in [[1,n]]^p} x_{i_1,1} \cdots x_{i_p,p} \varphi(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p})$$

Définition 14 (Forme p-linéaire alternée).

Soit $\varphi : E^p \to \mathbb{K}$ une forme p-linéaire, où E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.
*On dit que φ est **alternée** lorsque $\forall (x_1, \cdots, x_p) \in E^p$ et $\forall (i,j) \in [[1,p]]^2$ tel que $i \neq j$, $x_i = x_j \Rightarrow \varphi(x_1, \cdots, x_p) = 0$.*

Définition 15 (Forme p-linéaire antisymétrique).

Soit $\varphi : E^p \to \mathbb{K}$ une forme p-linéaire.
*On dit que φ est **antisymétrique** lorsque $\forall (x_1, \cdots, x_p) \in E^p$ et $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leq i < j \leq p$:*

$$\varphi(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_p) = -\varphi(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_p).$$

Propriété 16.

Soit φ une forme p-linéaire sur E. φ est alternée si et seulement si elle est antisymétrique.

Propriété 17.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie p et φ une forme p-linéaire alternée sur E. Soit $(u_1, \cdots, u_p)$ une famille ***liée*** *de E, alors $\varphi(u_1, \cdots, u_p) = 0$.*

On note $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des formes p-linéaires alternée sur E.

Propriété 18 (Formes p-linéaires et permutations).

Soit ϕ une forme p-linéaire alternée sur E et $\sigma \in S_p$.
$\forall (x_1, \cdots x_p) \in E^p,\ \phi(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(p)}) = \epsilon(\sigma)\phi(x_1, \cdots, x_p)$.

Propriété 19 (Forme p-linéaire alternée sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p).

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$, φ une forme p-linéaire alternée sur E et p vecteurs de E : $x_j = \sum_{i=1}^{p} x_{ij} e_i$ pour tout $j \in [[1, p]]$. Alors

$$\varphi(x_1, \cdots, x_p) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} \cdots x_{\sigma(n),n} \varphi(e_1, \cdots, e_p)$$

On en déduit que

1. *il existe une unique forme p-linéaire alternée φ_0 sur E telle que $\varphi_0(e_1, \cdots, e_p) = 1$,*
2. *toute forme p-linéaire alternée sur E est proportionnelle à φ_0,*
3. *$\mathcal{A}_p(E, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_p(E, \mathbb{K})$ de dimension 1.*

Définition 16 (Déterminant de p vecteurs en dimension p).

Soit E un $\mathbb{K}$espace vectoriel de dimension p rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$.
L'unique forme p-linéaire alternée φ_0 sur E vérifiant $\varphi_0(e_1, \cdots, e_p) = 1$ s'appelle déterminant dans la base $\mathcal{B}$.
On la note $det_{\mathcal{B}}$.

Si $x_j = \sum_{i=1}^{p} x_{ij} e_i$ pour tout $j \in [[1, p]]$. Alors $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_p) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} \cdots x_{\sigma(n),n}$.

5 Caractérisation des bases

Dans cette section E est un espace vectoriel de dimension n.

Propriété 20.

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ deux bases de E.
$det_{\mathcal{B}'} = det_{\mathcal{B}'}(e_1, \cdots, e_n) \times det_{\mathcal{B}}$.
$det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$.

Propriété 21 (Caractérisation d'une base de E).

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{F} = (x_1, \cdots, x_n)$ une famille d'éléments de E.
$\mathcal{F}$ est une famille libre de E (et donc est une base de E) ssi $det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n) \neq 0$.

6 Déterminant d'un endomorphisme

Propriété 22 (Définition du déterminant d'un endomorphisme).

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
$det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}) = det_{\mathcal{B}'}(u(\mathcal{B}'))$.
Puisque $det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}))$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie, on appelle ***déterminant de l'endomorphisme*** *u et on note $detu = det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}))$.*

Propriété 23.

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E et $\mathcal{B}$ une base de E.
$det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{F})) = detu \times det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.

Propriété 24 (Propriétés du déterminant d'un endomorphisme).

1. $det(id_E) = 1$,
2. $\forall u \in \mathcal{L}(E),\ \forall \alpha \in \mathbb{K},\ det(\alpha u) = \alpha^n det(u)$,
3. $\forall (u, v) \in \mathcal{L}(E)^2,\ det(u \circ v) = detu \times detv$,
4. $\forall u \in \mathcal{L}(E),\ u \in GL(E)$ *ssi* $detu \neq 0$ *et dans ce cas* $det(u^{-1}) = \dfrac{1}{detu}$.

L'application det induit un morphisme de groupes de $(GL(E), \circ)$ vers $(\mathbb{K}^*, \times)$.

7 Déterminant d'une matrice carrée

Définition 17.

Soit $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle déterminant de M et on note $det(M)$ le déterminant de la famille des vecteurs colonnes de M par rapport à la base canonique de $\mathbb{K}^n$: $\mathcal{B}$.
$det(M) = det_{\mathcal{B}}(C_1, \cdots, C_n)$.

Propriété 25.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $M = mat_{\mathcal{B}}(u)$.
$det(u) = det(M)$.

Propriété 26 (Propriétés du déterminant d'une matrice carrée).

1. $det(I_n) = 1$,
2. $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall \alpha \in \mathbb{K},\ det(\alpha M) = \alpha^n det(M)$,
3. $\forall (M, M') \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2,\ det(MM') = det(M) \times det(M')$,
4. $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ *ssi* $det(M) \neq 0$ *et dans ce cas* $det(M^{-1}) = \dfrac{1}{det(M)}$.
5. $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ det({}^tM) = det(M)$.

Que peut-on dire du déterminant d'une matrice antisymétrique ?

Propriété 27 (Déterminant d'une matrice diagonale).

Soit $M = Diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.

$$det(M) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Propriété 28.

Si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, alors* $det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$.

On retrouve ainsi les formules obtenues lorsque $n = 2$ et $n = 3$.
L'application qui à une amtrice carrée de taille n associe son déterminant est une forme n-linéaire alternée sur l'espace vectoriel des matrices lignes.

8 Calcul des déterminants

Propriété 29 (Influence des manipulations élémentaires sur le déterminant d'une matrice carrée).

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $C_1, \cdots, C_n$ *les vecteurs colonnes de* M.

1. *Si on échange* C_i *et* C_j $(i \neq j)$*, on multiplie le déterminant par* -1.
2. *Si on multiplie* C_i *par un scalaire* $\alpha \neq 0$ *on multiplie le déterminant par* $\frac{1}{\alpha}$.
3. *Si on ajoute à* C_i *une combinaison linéaire des autres, on ne change pas le déterminant.*

On a les mêmes résultats sur les lignes de M.

Propriété 30.

Si une matrice carrée est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & B & & \vdots \\ & & & 0 \\ * & \cdots & * & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

alors $det(A) = a_{n,n} det(B)$.

Propriété 31 (Déterminant d'une matrice triangulaire).

Soit $M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

$det(M) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

On peut ainsi utiliser la méthode du pivot de Gauss pour parvenir au déterminant d'une matrice triangulaire.

► Exemple : Calculer $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ (appelé déterminant de Van der Monde).

Définition 18 (Mineur, cofacteur).

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $(i,j) \in [[1,n]]^2$.
Le mineur d'indice (i,j) *est le déterminant* $\Delta_{i,j}$ *de la matrice extraite de* A *obtenue en supprimant la ième ligne et la* j*ème colonne de* A.
Le cofacteur d'indice (i,j) *est le scalaire* $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.

Propriété 32 (Développement d'un déterminant suivant une ligne ou une colonne).

Soit $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$\forall j\in[[1,n]],\ det(A)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$ *(développement suivant la colonne j).*

$\forall i\in[[1,n]],\ det(A)=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$ *(développement suivant la ligne i).*

Propriété 33 (Développement d'un déterminant suivant une ligne ou une colonne, cas où $n=3$).

Soient $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3,c_1,c_2,c_3\in\mathbb{K}$. On a

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}\ \textit{(développement suivant la 1}^{\textit{ère}}\textit{ colonne)}$$

$$=-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2\\ a_3 & c_3\end{vmatrix}+b_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1\\ a_3 & c_3\end{vmatrix}-b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}\ \textit{(développement suivant la 2}^{\textit{ième}}\textit{colonne)}$$

$$=c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}-c_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\ \textit{(développement suivant la 3}^{\textit{ième}}\textit{colonne).}$$

On a aussi

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2\\ a_3 & c_3\end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}\ \textit{(développement suivant la 1}^{\textit{ère}}\textit{ligne)}$$

$$=-a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}+b_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1\\ a_3 & c_3\end{vmatrix}-c_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}\ \textit{(développement suivant la 2}^{\textit{ème}}\textit{ligne)}$$

$$=a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}-b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\ \textit{(développement suivant la 3}^{\textit{ème}}\textit{ligne)}$$

On se ramène ainsi à des calculs de déterminant 2×2.

► Exemple : Calculer $\begin{vmatrix} 6 & 5 & 7\\ 1 & 0 & 14\\ 2 & 1 & 7\end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 5\\ 1 & 2023 & 2024\\ 0 & -1 & 3\end{vmatrix}$.

9 Comatrice

Définition 19 (Comatrice).

Soit $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On appelle comatrice de A et on note $Com(A)$ la matrice des cofacteurs de A, c'est-à-dire la matrice $\Delta=(\delta_{i,j})$, où δ_{ij} est le cofacteur de a_{ij} dans A.

Propriété 34 (Lien entre déterminant et comatrice).

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
$ACom(A)^T=Com(A)^TA=det(A)I_n$.
En particulier, si A est inversible alors $A^{-1}=\dfrac{1}{det(A)}Com(A)^T$.

On retrouve ainsi que $A=\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}$ est inversible ssi $ad-bc\neq 0$ et alors $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c\\ -b & a\end{pmatrix}$.