TD 28 : Déterminants

▶ Exercice 1 (refce 4) : $\varphi\ :\ \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X],\ P \mapsto (X^2-1)P' - (2X+1)P$ est-il un automorphisme ?

▶ Exercice 2 (refce 5) : Pour quelles valeurs de a, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$ est-elle inversible dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

▶ Exercice 3 (refce 6) : Résoudre le système suivant dans le cas où il est de Cramer : $\left\{\begin{array}{c} x+2y+kz=1 \\ 3x+4y+2z=k \\ 2x+3y-z=1 \end{array}\right.$, dans le cas où $k \in \mathbb{R}$ est fixé.

▶ Exercice 4 (refce 7) : Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Factoriser $\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos b & \cos 2b \\ 1 & \cos c & \cos 2c \end{vmatrix}$

▶ Exercice 5 (refce 8) : Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_3 = 0$.

▶ Exercice 6 (refce 9) : Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix}$, où $x \in \mathbb{R}$ est fixé.

▶ Exercice 7 : Déterminant de Vandermonde.
Soient $n \geq 1$ et $n+1$ scalaires $x_0,\ x_1,\ x_2, \cdot x_n$. On appelle déterminant de Vandermonde relatif à la liste $(x_0,\ x_1,\ x_2, \cdots, x_n)$ le déterminant d'ordre $n+1$ suivant :

$$V(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

. Dans cet exercice, on veut montrer et on retiendra que $V(x_0, \cdots, x_n) = \prod\limits_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) = \prod\limits_{i=0}^{n-1} \prod\limits_{j=i+1}^{n} (x_j - x_i)$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $V(x_0, \cdots, x_n) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \cdots (x_n - x_0) V(x_1, \cdots, x_n)$.
2. En déduire que pour tout $n \geq 1$, $V(x_0, \cdots, x_n) = \prod\limits_{i=0}^{n-1} \prod\limits_{j=i+1}^{n} (x_j - x_i)$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le déterminant de Vandermonde $V(x_0, \cdots, x_n)$ soit non nul.
4. Déterminer $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$ où a, b, c et d sont des réels quelconques.

▶ Exercice 8 (refce 11) : Si $v_1 = (a,b,c)$ et $v_2 = (a', b', c')$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique. Si (v_1, v_2) est libre, écrire l'équation du plan vectoriel engendré par (v_1, v_2).

▶ Exercice 9 (refce 12) : Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ existe-t-il des vecteurs non nuls $v \in \mathbb{R}^3$ tels que $\varphi(v) = \lambda v$?

▶ Exercice 10 (refce 14) : On se place dans un espace vectoriel réel E de dimension 3 qu'on suppose rapporté à une base. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le réel m pour que les trois plans de E d'équations respectives $(1-m)x - 2y + z = 0$, $3x - (1+m)y - 2z = 0$ et $3x - 2y - (1+m)z = 0$ contiennent une même droite vectorielle.

▶ Exercice 11 (refce 15) : On se place dans un espace vectoriel réel de dimension 3 rapporté à une base $\mathcal{B} = (i, j, k)$. Les familles de vecteurs suivantes sont-elles des bases de E ?

1. $(i - j, k)$,
2. $(i - j, 2i + 2k, k, i + j + k)$,
3. $(i - j + k, i + j + k, 2i + 2k)$,
4. $(i - j + k, i + j + k, i + j + 2k)$,
5. $(i + j + 2k, i - j + k, i + j + k)$.

▶ Exercice 12

1. Montrer que le déterminant d'une matrice antisymétrique d'ordre impair est nul. Cela reste-t-il vrai pour une matrice d'ordre pair ?
2. Que peut-on dire du déterminant de deux matrices semblables ?

▶ Exercice 13 (refce 17) :
On considère la base canonique de $\mathbb{R}^4$ que l'on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.
Montrer que $\mathcal{C} = (e_2 + e_3, e_1 + e_2 - e_3 - e_4, e_1 + e_4, e_1 - e_2 + e_3 - e_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

▶ Exercice 14 (refce 39) :
Soit $n \geq 2$. On pose $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & & (0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.
Déterminer une relation de récurrence entre Δ_{n+1} et Δ_n en fonction de n.

▶ Exercice 15 (refce 58) :
On rappelle que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
Préciser $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$ et $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$.
On considère l'endomorphisme ϕ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par : $\phi(M) =^t M$. Calculer le déterminant de ϕ.