

TD29 : Probabilités

Exercice E 1.

On considère deux dés. Le premier est équilibré, le second truqué. Pour ce second dé, on suppose que toutes les faces ont la même probabilité d'apparaître à l'exception du 6.

On suppose que, lorsque l'on choisit un dé au hasard et qu'on le lance, on tombe sur un nombre pair avec la probabilité $\frac{9}{16}$.

1. Déterminer la probabilité que chacune des faces du second dé apparaisse.
2. On suppose maintenant que l'on choisit l'un des deux dés et qu'on le lance trois fois. Le six apparaît alors trois fois. Quelle est la probabilité que l'on ait choisi le dé équilibré ?

Exercice A 1.

Soient A et B deux événements indépendants. Montrer que \bar{A} et \bar{B} sont indépendants.

Exercice A 2.

On lance deux dés au hasard. Etudier l'indépendance mutuelle ou deux à deux des événements :

- A : « Le premier dé donne une face impaire, »
- B : « Le deuxième dé donne une face impaire, »
- C : « La somme des deux résultats est impaire. »

Exercice E 2.

On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules blanches et noires. On suppose que l'urne U_1 contient des boules blanches en proportion p_1 et l'urne U_2 en proportion p_2 . On tire alors une urne et on y effectue successivement deux tirages avec remise.

On note B_1 l'événement : « la boule tirée au tirage 1 est blanche » et B_2 l'événement : « la boule tirée au tirage 2 est blanche ».

B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?

Exercice E 3.

On lance n fois une pièce équilibrée, avec $n \geq 2$. On considère les événements :

A_n : « on obtient au plus une fois « pile » » ;

B_n : « on obtient au moins une fois « pile » et au moins une fois « face » ».

Montrer que A_n et B_n sont indépendants si et seulement si $n = 3$.

Exercice E 4.

Une urne contient n boules portant les lettres de l'alphabet ($n \leq 26$). On les tire toutes successivement.

1. Quelle est la probabilité que les boules portant les lettres A , B et C aient été tirées dans l'ordre alphabétique ?
2. Info Créer en **Python** une fonction booléenne `tirage` prenant n comme argument, simulant l'expérience et sortant `True` si A , B et C ont été tirées dans l'ordre alphabétique et `False` sinon.
3. Info Créer en **Python** une fonction `estimation_proba` qui sort une estimation de la probabilité de cet événement grâce à une fréquence.
4. Quelle est la probabilité que les boules A , B et C aient été tirées dans l'ordre alphabétique et à la suite ?
5. Quelle est la probabilité que l'on ai tiré les boules A, B et C à la suite mais pas forcément dans cet ordre ?

Exercice E 5.

Un sac contient des jetons numérotés de 1 à 12. On en tire 3, successivement, avec remise.

1. Quelle est la probabilité qu'on ait obtenu trois fois le même nombre ?
2. Quelle est la probabilité qu'on ait obtenu trois nombres dans l'ordre strictement croissant ?
3. Quelle est la probabilité qu'on ait obtenu trois nombres dans l'ordre croissant au sens large ?

Exercice A 3.

On tire au hasard et sans remise deux dominos d'un jeu de dominos. Quelle est la probabilité qu'ils soient juxtaposables ?

Exercice E 6.

Une commode a 9 tiroirs. Votre paire de chaussettes préférée a une chance sur deux de se trouver dans cette commode et, si elle s'y trouve, elle a des chances égales de se trouver dans l'un quelconque des tiroirs.

1. Quelle est la probabilité pour qu'elle se trouve dans le neuvième tiroir ?
2. Vous avez déjà cherché en vain dans les huit premiers tiroirs. Est-ce la peine d'ouvrir le dernier ?

Exercice A 4.

Une pièce A amène Face avec une probabilité $1/2$. Une autre pièce B amène Face avec une probabilité $3/5$. On choisit une des deux pièces au hasard et on la lance. Si elle amène Face, on conserve la pièce qu'on vient de lancer, sinon on change de pièce.

On effectue ainsi une suite de lancers.

Quelle est la probabilité d'obtenir Pile au n ème lancer ?

Exercice A 5.

On lance n dés non pipés. On considère l'événement A_n défini par « le total des numéros amenés est pair ». Calculer $P(A_n)$ par récurrence sur n .

Info : Vérifier ce résultat théorique pour $n = 3$ en estimant $P(A_3)$ grâce à une fréquence en utilisant **Python**.

Exercice E 7.

1. Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{1}{n2^n}$ est convergente.
2. Calculer $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ en remarquant que $\forall k \geq 1, u_k = \int_0^{1/2} x^{k-1} dx$. En déduire la somme de la série.
3. On dispose d'une urne contenant initialement une boule blanche et une boule noire. On lance une pièce équilibrée. Si elle amène « pile », on rajoute une boule noire dans l'urne et on recommence jusqu'à ce que la pièce amène « face ». On tire alors une boule dans l'urne. Quelle est la probabilité que la boule tirée soit blanche ?
4. Info Écrire un script qui simule l'expérience et qui affiche la couleur de la boule finalement tirée.

Exercice A 6.

1. Pour a, b réels et $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} C_n^{2k} a^{2k} b^{n-2k}$ (On rappelle la notation $C_n^k = \binom{n}{k}$).
2. Une urne contient 100 jetons numérotés de 1 à 100. On tire n jetons, un par un, avec remise.
 - (a) Calculer la probabilité de tirer un nombre pair de jetons de numéros impairs.
 - (b) Calculer la probabilité de tirer un nombre pair de jetons de numéros multiples de 3.