Ex 9 (réf ce 12) Soit B la base canonique de $\mathbb{R}^3$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Soit $V = \mathrm{mat}_B(v)$. On a $V \neq 0_{3,1}$

$\varphi(v) = \lambda v$ ssi $\mathrm{mat}_B(\varphi(v)) = \mathrm{mat}_B(\lambda v)$

ssi $\mathrm{mat}_B(\varphi) \times \mathrm{mat}_B(v) = \lambda\, \mathrm{mat}_B(v)$

ssi $AV = \lambda V$

ssi $AV - \lambda V = 0_{3,1}$

ssi $(A - \lambda I_3) V = 0_{3,1}$

ssi $(A - \lambda I_3)$ non inversible $(V \neq 0_{3,1})$

ssi $\det(A - \lambda I_3) = 0$.

ssi $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

ssi ($L_1 \leftrightarrow L_3$) $-\begin{vmatrix} 1 & 1 & -\lambda \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 3-\lambda & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$

ssi ($L_2 \leftarrow L_1 + L_2$, $L_3 \leftarrow L_3 - (3-\lambda)L_1$) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -\lambda \\ 0 & -\lambda+1 & 1-\lambda \\ 0 & -1+\lambda & -2+3\lambda-\lambda^2 \end{vmatrix} = 0$

ssi (dévelt à C_1) $1 \begin{vmatrix} -\lambda+1 & 1-\lambda \\ -1+\lambda & -2+3\lambda-\lambda^2 \end{vmatrix} = 0$

ssi $(1-\lambda)(-2+3\lambda-\lambda^2) - (1-\lambda)(\lambda-1) = 0$

ssi $(1-\lambda)[-2+3\lambda-\lambda^2 - \lambda + 1] = 0$

ssi $(1-\lambda)(-1+2\lambda-\lambda^2) = 0$

ssi $(\lambda-1)(1-2\lambda+\lambda^2) = 0$

ssi $(\lambda-1)(\lambda-1)^2 = 0$

ssi $(\lambda-1)^3 = 0$ ssi $\lambda = 1$

Ex 10 rétec 14

Dire que les trois plans contiennent une même droite vectorielle, c'est dire que le système de leurs équations admet au moins une solution non nulle, c'àd dire que le système :

$$\begin{cases} (1-m)x - 2y + z = 0 \\ 3x - (1+m)y - 2z = 0 \\ 3x - 2y - (1+m)z = 0 \end{cases}$$ n'est pas de Cramer

càd dire que la matrice $\begin{pmatrix} 1-m & -2 & 1 \\ 3 & -(1+m) & -2 \\ 3 & -2 & -(1+m) \end{pmatrix}$ est non inversible

càd $\begin{vmatrix} 1-m & -2 & 1 \\ 3 & -(1+m) & -2 \\ 3 & -2 & -(1+m) \end{vmatrix} = 0$

càd $m(m-1)(m+2) = 0$ (calculs à faire)

càd $m \in \{-2, 0, 1\}$

Comme les deux premières équations sont toujours indépendantes le rang du système est égal à 2 exactement lorsque $m \in \{-2, 0, 1\}$, le rang du système est égal à 2 exactement et l'intersection est exactement une droite.

Ex 6 vérifie 9

$$\begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_2}}{=} \begin{vmatrix} x+2 & x+1 & x+1 \\ 2x+3 & x+1 & x+1 \\ 3x+5 & 2x+3 & 5x+9 \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{=} \begin{vmatrix} -x-1 & 0 & 0 \\ 2x+3 & x+1 & x+1 \\ 3x+5 & 2x+3 & 5x+9 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{dével \% à } L_1}}{=} (-x-1) \begin{vmatrix} x+1 & x+1 \\ 2x+3 & 5x+9 \end{vmatrix} = -(x+1)\left[(x+1)(5x+9) - (x+1)(2x+3)\right]$$

$$= -(x+1)(x+1)\left[5x+9-2x-3\right]$$

$$= -(x+1)^2(3x+6)$$

$$= -3(x+1)^2(x+2).$$