A1 Soient A et B deux évènements indépendants.
Montrer que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.
A et B sont indépendants donc $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

$P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1-P(A\cup B) = 1-(P(A)+P(B)-P(A\cap B))$
$= 1-P(A)-P(B)+P(A\cap B) = 1-P(A)-P(B)-P(A)P(B)$.

$P(\overline{A})P(\overline{B}) = (1-P(A))(1-P(B)) = 1-P(A)P(B)-P(A)-P(B)$.

Donc $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})$ et $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

A2 L'univers Ω est ici l'ensemble des 2-listes de $[\![1,6]\!]$
$Card(\Omega)=6^2=36$.
Il y a équiprobabilité car aucun des 2 dés n'est truqué,
donc $P(A)= \dfrac{Card(\{(i,j)\in[\![1,6]\!]^2 \text{ tq } i \text{ est impair}\})}{Card(\Omega)} = \dfrac{3\times 6}{36}=\dfrac{18}{36}=\dfrac{1}{2}$

car $Card(\{(i,j)\in[\![1,6]\!]^2 \text{ tq } i \text{ est impair}\})$
$= Card(\{(1,j) \text{ où } j\in[\![1,6]\!]\}\cup\{(3,j) \text{ où } j\in[\![1,6]\!]\}\cup\{(5,j) \text{ où } j\in[\![1,6]\!]\})$
$= 6+6+6=18$.

De même $P(B)=\frac{1}{2}$

$P(C)= \dfrac{Card(\{(i,j)\in[\![1,6]\!]^2 \text{ tq } i+j \text{ est impair}\})}{Card(\Omega)}$

$= \dfrac{Card(\{(i,j)\in[\![1,6]\!]^2 \text{ tq } i \text{ pair et } j \text{ impair}\}\cup\{(i,j)\in[\![1,6]\!]^2 \text{ tq } i \text{ impair et } j \text{ pair}\})}{Card(\Omega)}$

$= \dfrac{9+9}{36}=\dfrac{1}{2}$.

$P(A\cap B) = \dfrac{Card(\{(i,j)\in\{1,3,5\}^2\})}{Card(\Omega)} = \dfrac{9}{36}=\dfrac{1}{4}=P(A)P(B)$

$P(B\cap C)= \dfrac{Card(\{(i,j)\in[\![1,6]\!]^2 / i \text{ pair et } j \text{ impair}\})}{Card(\Omega)} = \dfrac{9}{36}=\dfrac{1}{4}=P(B)P(C)$

$P(A\cap C)= \dfrac{Card(\{(i,j)\in[\![1,6]\!]^2 / i \text{ impair et } j \text{ pair}\})}{Card(\Omega)} = \dfrac{9}{36}=\dfrac{1}{4}=P(A)P(C)$

$P(A\cap B\cap C)= \dfrac{Card(\emptyset)}{Card(\Omega)}=0$.

Conclusion : A et B sont indépendants, A et C sont indépendants, B et C sont indépendants.
A, B et C sont donc 2 à 2 indépendants
Mais $P(A\cap B\cap C)\neq P(A)P(B)P(C)$ donc A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

A3

On dénombre 28 dominos dans une boîte de dominos car un domino est une 2-combinaison de l'ensemble $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ ou un élément de l'ensemble $\{(x,x) \text{ avec } x\in[\![0,6]\!]\}$ (domino double)
Le nombre de dominos dans la boîte est : $\binom{7}{2}+7=\frac{7\times 6}{2}+7=7\times 4=28$

L'univers Ω est l'ensemble des 2-combinaisons de l'ense[illegible] dominos, qui est de cardinal 28. $\text{Card}(\Omega) = \binom{28}{2} = 14 \times 27 = 378$.
On munit cet univers de la probabilité uniforme.
Soit A : "les deux dominos tirés sont superposables."
On a $A = A' \cup A''$ où A' : "l'un des 2 dominos tirés est un double et les deux dominos sont superposables"
et A'' : "les deux dominos tirés sont superposables et aucun des deux dominos est un double"

$\text{Card}(A') = 42$
on raisonne par choix successifs : on choisit un double domino (7 choix) $\boxed{x|x}$ et un autre domino $\boxed{x|y}$ avec $y \neq x$, $y \in [\![0,6]\!]$ (6 choix). On a donc 42 possibilités.
$\text{Card}(A'') = \{(x,y,z) \in [\![0,6]\!],\ x \neq y \text{ et } y \neq z \text{ et } x \neq z\}$ = ens des 3 listes sans répétition de $[\![0,6]\!]$. $\text{Card}(A'') = 7 \times 6 \times 5 = 210$.
En effet A'' est constitué des événements : $\boxed{x|y}\ \boxed{y|z}$ avec $(x,y,z) \in [\![0,6]\!]^2$ et $x \neq y$, $y \neq z$ et $x \neq z$.

$\text{Card}(A) = \text{Card}(A') + \text{Card}(A'') = 42 + 210 = 252$

$P(A) = \frac{252}{378} = \boxed{\frac{2}{3} = P(A)}$

$\boxed{A4}$ Soit $n \geqslant 2$.
Soit A_n : "la pièce utilisée au k^e lancer est la pièce A."
Soit B_n : "la pièce utilisée au k^e lancer est la pièce B".
(A_n, B_n) est un système complet d'événements de probas non nulles
Soit P_n : "la pièce donne Pile au n^e lancer"

$$P(P_n) \underset{FPT}{=} P_{A_n}(P_n)\,P(A_n) + P_{B_n}(P_n)\,P(B_n) = \frac{1}{2}P(A_n) + \frac{2}{5}\left(1 - P(A_n)\right)$$
$$= \frac{2}{5} + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right)P(A_n) = \frac{2}{5} + \frac{1}{10}P(A_n)$$

$$P(A_n) \underset{FPT}{=} P_{A_{n-1}}(A_n)\,P(A_{n-1}) + P_{B_{n-1}}(A_n)\,P(B_{n-1})$$
(A_{n-1}, B_{n-1}) SCE de probas non nulles
$$= \frac{1}{2}P(A_{n-1}) + \frac{2}{5}\left(1 - P(A_{n-1})\right)$$

On pose $a_n = P(A_n)$.
$a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{2}{5} - \frac{2}{5}a_{n-1} = \frac{2}{5} + \frac{1}{10}a_{n-1}$ et $a_1 = \frac{1}{2}$
(a_n) est une suite arithmético-géométrique. Soit $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell = \frac{2}{5} + \frac{\ell}{10}$
ssi $\frac{9}{10}\ell = \frac{2}{5}$ ssi $9\ell = 4$ ssi $\ell = \frac{4}{9}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$, $a_n - \ell = \frac{1}{10}(a_{n-1} - \ell)$ donc $a_n - \ell = \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}(a_1 - \ell)$
et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{9}\right) + \frac{4}{9} = \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}\frac{1}{18} + \frac{4}{9}$.

Ainsi $\forall n \geqslant 1$, $P(P_n) = \frac{2}{5} + \frac{1}{10}\left(\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}\frac{1}{18} + \frac{4}{9}\right) = \frac{2}{5} + \left(\frac{1}{10}\right)^n\frac{1}{18} + \frac{4}{90}$

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad P(P_n) = \left(\frac{1}{10}\right)^n \frac{1}{18} + \frac{4}{9}}$$

$\boxed{A5}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\mathcal{P}_n$: " $P(A_n) = \frac{1}{2}$ " Montrons par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

- Initialisation : $P(A_1) = \dfrac{Card(\{2,4,6\})}{Card(\{1,2,3,4,5,6\})} = \dfrac{1}{2}$

- hérédité : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tq $\mathcal{P}_n$ vraie.

$P(A_{n+1}) \overset{FPT}{=} P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})P(\overline{A_n})$

$(A_n, \overline{A_n})$ SCE de probas non nulles

HR avec $P(\overline{A_n}) = 1-P(A_n) = \frac{1}{2}$

$= P_{A_n}(A_{n+1}) \times \frac{1}{2} + P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \times \frac{1}{2}$

Sachant que le total des numéros amenés par les n 1ers dés est pair, le total des numéros amenés par les $n+1$ dés est pair ssi le nombre obtenu par le dernier dé est pair (3 possibilités sur 6) donc $P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$

Sachant que le total des numéros amenés par les n 1ers dés est impair, le total des numéros amenés par les $n+1$ dés est pair ssi le numéro obtenu par le dernier dé est impair (3 possibilités sur 6 aussi) donc $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$.

Donc $P(A_{n+1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\mathcal{P}$

AB ① $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} a^{2k} b^{n-2k} \overset{\overline{p^{a+b}-q^{a+b}}}{=} \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n = \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-a)^k b^{n-k} = (-a+b)^n = \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} (-a)^k b^{n-k} + \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} (-a)^k b^{n-k}$$

$$= \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} (a)^k b^{n-k} - \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Donc $\displaystyle 2\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \left((a+b)^n + (-a+b)^n\right) \Rightarrow \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \frac{1}{2}\left((a+b)^n + (-a+b)^n\right)$

② $\Omega = [\![1, 100]\!]^n$ $\qquad \mathrm{Card}(\Omega) = 100^n$

Soit $k \in [\![0, n]\!]$ et A_k : " on a tiré k jetons de n° impairs ".

ⓐ $\displaystyle p = P\Big(\bigcup_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n} (A_k)\Big) \underset{\text{union disjointe}}{=} \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n} P(A_k) = \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{1}{2}\left(1^n + 0^n\right) = \frac{1}{2}$

Soit $k \in [\![0, n]\!]$ et B_k : " on a tiré k jetons de n°s multiple de 3 "

ⓑ $\displaystyle p = P\Big(\bigcup_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n} (B_k)\Big) = \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n} P(B_k) = \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k} = \frac{1}{2}\left(1^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$