Chapitre 30 : Sous-espace affine d'un espace vectoriel

Introduction

Le but de ce chapitre est de montrer comment l'algèbre linéaire permet d'étendre les notions de géométrie affine étudiées au collège et au lycée et d'utiliser l'intuition géométrique dans un cadre élargi. Il est aussi de modéliser un problème affine par une équation $u(x) = a$ où u est une application linéaire, et permet d'unifier plusieurs situations de ce type déjà rencontrées.

1 Sous-espace affine d'un espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1.1 Translation

Définition 1.

Soit $u \in E$, la translation de vecteur u est définie par :

$$t_u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x+u. \end{array}$$

Propriété 1.

Soit $T(E)$ l'ensemble des translations de E. $(T(E), \circ)$ est un groupe commutatif.

1.2 Définition d'un sous-espace affine

Définition 2.

On appelle sous-espace affine de E l'image par une translation d'un sous-espace vectoriel de E.

Soit F un sous-espace vectoriel de E, $u \in E$,

$$\begin{aligned} t_u(F) &= \{t_u(x) \mid x \in F\} \\ &= \{x+u \mid x \in F\} \\ &= u+F \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Notation : } t_u(F) = u+F.}$$

Ainsi, on dit qu'une partie $\mathcal{F}$ de E est un sous-espace affine de E s'il existe un vecteur u de E et un sous-espace vectoriel F de E tels que $\mathcal{F} = u + F$.
Pour $x \in E$, $x \in \mathcal{F} = u + F$ ssi $x - u \in F$.
► Cas particuliers :

— Si $u = 0_E$, $0_E + F = F$. Les sous-espaces vectoriels de E sont des sous-espaces affines particuliers.

— Si $u \in F$, $u + F = \{u + x \mid x \in F\} \subset F$.
Or $\forall x \in F$, $x = u + (x - u) \in u + F$, donc $F \subset u + F$.
Conclusion : Si $u \in F$, $F = u + F$.

— L'écriture $B = A + \vec{u}$ est équivalente à la relation $\vec{AB} = \vec{u}$.

Propriété 2.

L'image par une translation d'un sous-espace affine de E est un sous-espace affine de E.

Propriété 3 (Définition de la direction d'un sous-espace affine).

1. *Soit F un sous-espace vectoriel de E et $u \in E$,*
   $u + F = F \iff u \in F \iff 0_E \in (u + F)$.
2. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Soient u et v deux éléments de E.*
   $(u + F) \subset (v + G) \iff (F \subset G$ *et* $(v - u) \in G)$.
3. *Soit $\mathcal{F} \subset E$.*
   $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de E $\iff \forall u \in \mathcal{F},\ F_u = \{v - u \mid v \in \mathcal{F}\}$ *est un sous-espace vectoriel de E.*
   Alors F_u ne dépend pas de u d'où $F_u = F$ et $\forall u \in \mathcal{F},\ \mathcal{F} = u + F$.
   F est appelé direction du sous-espace affine.

▶ Exemples :
- Un singleton est un sous-espace affine dont la direction est $\{0_E\}$.
- L'ensemble $\{(1-t, 4-2t, -5+2t \mid t \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$. C'est le sous-espace affine passant par $(1, 4, -5)$ et dirigé par $\mathrm{Vect}(\{(-1, -2, 2)\})$.
- L'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$. C'est le sous-espace affine passant par $(1, 0, 0)$ et dirigé par $\{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha + \beta + \gamma = 0\}$.
- Dans le plan, l'ensemble d'équation $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ est une droite affine ; elle est dirigée par la droite vectorielle d'équation $ax + by = 0$ et passe par $(\frac{-c}{a}, 0)$.
- Sous-espaces affines de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Hyperplan affine.

1.3 Sous-espaces affines parallèles

Définition 3.

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux sous-espaces affines de E de directions respectives F et F'.
On dit que $\mathcal{F}$ est parallèle à $\mathcal{F}'$ si $F \subset F'$. On dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont parallèles si $F = F'$.

▶ Exemples :
- Deux droites sont parallèles si et seulement si elles admettent un vecteur directeur commun.
- Dans l'espace, une droite peut être parallèle à un plan, deux plans peuvent être parallèles mais un plan n'est jamais parallèle à une droite.

★ Exercice : montrer que deux sous-espaces affines parallèles sont soit disjoints, soit confondus.

1.4 Intersection de deux sous-espaces affines

Propriété 4.

Soient $\mathcal{F} = u + F$ et $\mathcal{G} = v + G$ deux sous-espaces affines de E.

1. $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset \iff (v - u) \in F + G$.
2. *si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un sous-espace affine de E de direction $F \cap G$.*

★ Exercice : montrer que deux sous-espaces affines dont les directions respectives sont supplémentaires ont une intersection réduite à un point.

2 Equations linéaires

2.1 Définition

Soient E et F deux K-espaces vectoriels

Définition 4.

Une équation linéaire est une équation du type $u(x) = b$, où u est un élément de $\mathcal{L}(E,F)$, b est un élément de F et où l'inconnue x est dans E. Le vecteur b est appelé second membre de l'équation.

► Exemples :

— Dans les systèmes linéaires de n équations à p inconnues

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

où $a_{i,j}$ et b_i sont dans $\mathbb{K}$, l'inconnue est le vecteur $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de $\mathbb{K}^p$.

— Dans les équations différentielles linéaires du premier ordre

$$a(t)y' + b(t)y = c(t),$$

où les fonctions a, b et c sont continues sur un intervalle I, l'inconnue est la fonction y. L'application linéaire est

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(I) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(I) \\ y & \longmapsto & ay' + by \end{array}$$

et le second membre est $c \in \mathbf{C}^0(I)$.

2.2 Structure de l'ensemble des solutions

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, u un élément de $\mathcal{L}(E,F)$ et b un élément de F ;
On pose $\mathcal{S} = \{x \in E \mid u(x) = b\}$.

Définition 5.

On appelle équation sans second membre ou équation homogène associée à l'équation linéaire $(E) : u(x) = b$, l'équation $(E_0) : u(x) = 0$.
On note S_0 l'ensemble des solutions de (E_0).

Propriété 5.

Avec les notations précédentes,

1. *S_0 est un sous-espace vectoriel de E.*
2. *Si $\mathcal{S} \neq \emptyset$ et si $x_0 \in \mathcal{S}$, alors $\mathcal{S}$ est le sous-espace affine de direction S_0 et contenant x_0, c'est-à-dire $\mathcal{S} = x_0 + S_0 = \{x \in E \mid \exists z \in S_0 \mid x = x_0 + z\}$.*

L'ensemble des solutions est soit l'ensemble vide, soit un sous-espace affine dirigé par $Ker u$.
La solution d'une équation linéaire est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation sans second membre associée.

► Exemple : les solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, du second ordre.
★ Exercice : Résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation différentielle $ty'(t) - y(t) = t^2e^t$. On utilisera la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière de cette équation. On trouve que les fonctions solutions de cette équation sont les fonctions de la forme : $y(t) = \lambda t + te^t$, où λ est réel.