Chapitre 31 : espaces préhilbertiens réels

1 Produit scalaire - Orthogonalité

1.1 Produit scalaire

Définition 1 (Produit scalaire).

*Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle **produit scalaire sur** E une forme bilinéaire ϕ symétrique définie positive.*
On note : $\forall(u,v)\in E^2,\ \phi(u,v)=(u|v)=u.v$.

Remarque 1.

1. *ϕ est une forme bilinéaire sur E lorsque $\phi\ :\ E\times E\to\mathbb{R},\ (u,v)\mapsto\phi(u,v)=(u|v)$ et $\forall(u,v,w)\in E^3,\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ (u+\lambda v|w)=(u|w)+\lambda(v|w)$ et $(u|v+\lambda w)=(u|v)+\lambda(u|w)$.*
2. *ϕ est une forme bilinéaire symétrique sur E lorsque ϕ est bilinéaire et $\forall(u,v)\in E^2,\ (u|v)=(v|u)$.*
3. *ϕ est une forme bilinéaire positive sur E lorsque ϕ est bilinéaire et $\forall u\in E,\ (u|u)\geq 0$.*
4. *ϕ est une forme bilinéaire définie sur E lorsque ϕ est bilinéaire et $\forall u\in E,\ (u|u)=0\Rightarrow u=0_E$.*
5. *Pour montrer que f est bilinéaire symétrique il suffit de montrer que f est linéaire par rapport à l'une des deux variables et qu'elle est symétrique.*

Définition 2 (Espace préhilbertien).

*On appelle **espace préhilbertien réel** un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire ϕ.*

► Exemples :

1. $E=\mathbb{R}^2$. $\forall u=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2,\ \forall v=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$, $\phi(u,v)=xx'+yy'$. Vérifier que ϕ est bien un produit scalaire, appelé **produit scalaire canonique sur** $\mathbb{R}^2$.
2. $E=\mathbb{R}^3$. $\forall u=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3,\ \forall v=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$, $\phi(u,v)=xx'+yy'+zz'$. Vérifier que ϕ est bien un produit scalaire, appelé **produit scalaire canonique sur** $\mathbb{R}^3$.
3. $E=\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. $\forall(f,g)\in E^2,\ \phi(f,g)=\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$. Vérifier que ϕ est bien un produit scalaire.
4. $E=\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $\forall(X,Y)\in E^2,\ \phi(X,Y)={}^tXY$. Vérifier que ϕ est bien un produit scalaire.
5. $E=\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. $\forall(X,Y)\in E^2,\ \phi(X,Y)=tr({}^tXY)$. Vérifier que ϕ est bien un produit scalaire.

1.2 Propriétés

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(.|.)$.

$$\boxed{\forall u\in E,\ ||u||=\sqrt{(u|u)}.}$$

► Exemple 1 : Soient u et v deux éléments de $\mathbb{R}^n$ tels que $||u||=1$ et $||v||=2$ et $<u,v>=-1$. Calculer le produit scalaire $<3u+v,-u+5v>$.

Théorème 1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz).

$\forall (u,v) \in E^2,\ |(u|v)| \leq ||u||\ ||v||$.
Il y a égalité ssi (u,v) est une famille liée.

► Exemple 2 : Obtenir une majoration de $\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k}$ lorsque $n \geq 2$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Définition 3 (Norme sur E).

*On appelle **norme sur** E, toute application N de E dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant :*

1. $(\forall x \in E)\quad (N(x) = 0 \Rightarrow x = 0)$ *(séparation)*
2. $(\forall x \in E)\quad (\forall \lambda \in \mathbb{R})\quad N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$ *(c'est l'homogénéité de la norme)*
3. $(\forall x, y \in E)\quad N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$ *(c'est l'inégalité triangulaire)*

Propriété 1 (Norme euclidienne).

*$||.||$ est une norme sur E. Toute norme ainsi définie à partir d'un produit scalaire est appelée **norme euclidienne** associée à $(|)$.*

Définition 4 (Vecteur unitaire).

*Un **vecteur unitaire** est un vecteur $u \in E$ tel que $||u|| = 1$.*

Propriété 2.

$\forall u \in E \setminus \{0_E\},\ \dfrac{1}{||u||}.u$ *est unitaire.*

► Exemple 3 Soit $u = (1,2,3)$. Trouver un vecteur colinéaire à u unitaire.

Définition 5 (Distance associée à une norme).

*Si N est une norme sur E, on appelle **distance associée à** N, l'application* $d : \begin{array}{l} E \times E \to \mathbb{R}_+ \\ (u,v) \mapsto N(v-u) \end{array}$.

*La distance associée à la norme euclidienne s'appelle **distance euclidienne**.*

Propriété 3.

1. $(\forall v \in E)\quad d(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v$
2. $(\forall u, v \in E)\quad d(u,v) = d(v,u)$
3. $(\forall u, v, w \in E)\quad d(u,w) \leqslant d(u,v) + d(v,w)$

Les formes bilinéaires symétriques sont intégralement caractérisées par leur comportement sur la diagonale, c'est-à-dire par la connaissance d'une telle forme ϕ sur l'ensemble des points (x,x). $x \mapsto \phi(x,x)$ est la forme quadratique associée. Une identité de polarisation permet d'esprimer une forme bilinéaire symétrique à partir de la forme quadratique associée.

Propriété 4 (Identités de polarisation et identité du parallélogramme).

Soit E un espace muni d'un produit scalaire $(.|.)$ et $\|.\|$ la norme euclidienne associée. Pour tout $(x,y) \in E^2$:

1. $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y)$
2. $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x|y)$
3. $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4(x|y)$
4. *identité du parallélogramme :* $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$

Interprétation géométrique : la somme des carrés des longueurs des côtés du parallélogramme est égale à la somme des carrés des longueurs des diagonales du parallélogramme.

Définition 6 (Orthogonalité de deux vecteurs de E).

Soit $(u,v) \in E^2$.
*u et v sont **orthogonaux** ssi $(u|v) = 0_{\mathbb{R}}$*
ssi $u = 0_E$ ou $v = 0_E$ ou ($u \neq 0_E$ et $v \neq 0_E$ et $(u,v) = \dfrac{\pi}{2}$).
On note dans ce cas $u \perp v$.

Propriété 5 (Propriété de Pythagore).

Etant donnés u et v deux vecteurs de E, $u \perp v$ si et seulement si $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

Propriété 6.

Soit $v \in E$ et F un sous-espace vectoriel de E.
v est orthogonal à F ssi v est orthogonal aux vecteurs de base de F.
Si $F = \text{Vect}(u_1, \cdots, u_p)$ alors v est orthogonal à F ssi $\forall i \in [[1,p]],\ < v, u_i >= 0$.

► Exemple 4 Donner un vecteur de $\mathbb{R}^3$ non nul orthogonal à $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x+3y-z=0\}$.
► Exemple 5 Déterminer $v \in \mathbb{R}^4$ non nul tel que v est orthogonal à $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y+z=0 \text{ et } 2y+z+t=0\}$.

Définition 7 (Orthogonalité de deux sous-espaces vectoriels de E).

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
*F et G sont **orthogonaux** ssi tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G*
ssi $\forall x \in F,\ \forall y \in G,\ (x|y) = 0_{\mathbb{R}}$.

$$\boxed{\text{On note dans ce cas } F \perp G.}$$

Propriété 7.

Si F et G sont orthogonaux alors $F \cap G = \{0_E\}$.

Remarque 2. *Deux plans ne peuvent donc pas être orthogonaux car l'intersection de deux plans est une droite et non un point. On dit alors qu'ils sont perpendiculaires. Par contre on peut dire de deux droites qu'elles sont orthogonales, ou d'un plan et d'une droite.*

Définition 8 (Orthogonal d'une partie de E).

Soit A une partie de E.
*On appelle **orthogonal de** A et on note $A^\perp$ l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de A.*

Propriété 8.

Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors
$F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E et
$F^\perp$ est orthogonal à F.

Propriété 9.

1. $E^\perp = \{0\}$ et $\{0\}^\perp = E$
2. *Soient A et B deux sous-espaces vectoriels de E. $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$*

2 Espace euclidien

Définition 9 (Espace euclidien).

*On appelle **espace euclidien** un espace préhilbertien réel de dimension finie $n \neq 0$.*

2.1 Existence de bases orthonormées

Définition 10 (Famille orthogonale, orthonormée).

Soit $\mathcal{F} = (e_1, \cdots, e_n) \in E^n$.
*$\mathcal{F}$ est **orthogonale** ssi $(e_1, \cdots, e_n)$ sont deux à deux orthogonaux.*
*$\mathcal{F}$ est **orthonormée (ou orthonormale)** ssi ($\mathcal{F}$ est orthogonale et $(e_1, \cdots, e_n)$ sont unitaires)*
ssi $\forall (i,j) \in [[1,n]]^2$, $< e_i, e_j >= \delta_{i,j}$ où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker.

Remarque 3. *La base canonique $\mathcal{B}_C(e_1, \cdots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormée. Dans cette base orthonormée, si $x = (x_1, \cdots, x_n)_{\mathcal{B}_C}$ alors pour tout $k \in [[1,n]]$, $x_k =< x, e_k >$ et $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k$.*

Propriété 10.

Une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul est une famille libre de E.

Remarque 4. *Cette dernière propriété est aussi vraie pour toute famille orthonormée.*

Propriété 11 (Relation de Pythagore).

Pour une famille de p vecteurs orthogonaux $(x_1, ..., x_p)$,

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|x_i\|^2$$

PROCEDE D'ORTHONORMALISATION DE GRAM-SCHMIDT

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base quelconque de E.
Problème : comment transformer $\mathcal{B}$ en une base orthonormée $\mathcal{B}' = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)$ telle que $\forall k \in [[1,n]]$, $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k) = \mathrm{Vect}(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_k)$, c'est-à-dire telle que les k premiers vecteurs engendrent le même espace vectoriel (seule contrainte).

Etape 1 : prendre $\epsilon_1 = \dfrac{1}{||e_1||} e_1$. On a bien $\mathrm{Vect}(e_1) = \mathrm{Vect}(\epsilon_1)$. On remarque que $\mathrm{Vect}(e_1, e_2) = \mathrm{Vect}(\epsilon_1, e_2)$.

Etape 2 : on veut trouver ϵ_2 tel que $\mathrm{Vect}(e_1, e_2) = \mathrm{Vect}(\epsilon_1, \epsilon_2)$, c'est-à-dire $\epsilon_2 \in \mathrm{Vect}(\epsilon_1, e_2)$ ou encore il existe α_1, α_2 tels que $\epsilon_2 = \alpha_1 \epsilon_1 + \alpha_2 e_2$. $\alpha_2 \neq 0$ car sinon ϵ_2 serait CL de ϵ_1 et alors (ϵ_1, ϵ_2) ne serait pas une famille libre. Trouvons donc α_1 et $\alpha_2 \neq 0$ tel que ϵ_2 soit unitaire et orthogonal à ϵ_1.

$(\epsilon_1|\epsilon_2) = 0$ ssi $\alpha_1 \underbrace{(\epsilon_1|\epsilon_1)}_{=1} + \alpha_2(\epsilon_1|e_2) = 0$.

$(\epsilon_2|\epsilon_2) = 1$ ssi $\alpha_1 \underbrace{(\epsilon_1|\epsilon_2)}_{=0} + \alpha_2(\epsilon_2|e_2) = 1$.

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (\epsilon_1|\epsilon_2) = 0 \\ (\epsilon_2|\epsilon_2) = 1 \end{array} \right. \text{ ssi } \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 = -\alpha_2(\epsilon_1|e_2) \\ \alpha_2^2(\underbrace{-(\epsilon_1|e_2)^2 + (e_2|e_2)}_{>0}) = 1 \end{array} \right.$$

En effet $(e_2|e_2) = ||e_2||^2$ et $(\epsilon_1|e_2)^2 < ||\epsilon_1||^2 ||e_2||^2 = ||e_2||^2$ (ϵ_1 et e_2 ne sont pas colinéaires donc l'inégalité de CS est stricte).

Donc S ssi $\left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 = -\alpha_2(\epsilon_1|e_2) \\ \alpha_2^2 = \dfrac{1}{-(\epsilon_1|e_2)^2 + (e_2|e_2)} \neq 0 \end{array} \right.$

On a bien que (ϵ_1, ϵ_2) est une famille orthonormée et $\text{Vect}(e_1, e_2) = \text{Vect}(\epsilon_1, \epsilon_2)$. On remarque que $\text{Vect}(e_1, e_2, e_3) = \text{Vect}(\epsilon_1, \epsilon_2, e_3)$.
Etape 2 bis : méthode plus rapide.
On veut trouver $\epsilon_2' \in \text{Vect}(\epsilon_1, e_2)$ sous la forme $\epsilon_2' = \alpha_1\epsilon_1 + e_2$ tel que $(\epsilon_1|\epsilon_2') = 0$ ssi $\alpha_1 \underbrace{(\epsilon_1|\epsilon_1)}_{=1} + (\epsilon_1|e_2) = 0$ ssi $\alpha_1 = -(\epsilon_1|e_2)$.
Alors $\epsilon_2' = e_2 - (\epsilon_1|e_2)\epsilon_1$ et on pose $\epsilon_2 = \dfrac{1}{||\epsilon_2'||}\epsilon_2'$. On a bien que (ϵ_1, ϵ_2) est une famille orthonormée et $\text{Vect}(e_1, e_2) = \text{Vect}(\epsilon_1, \epsilon_2)$.

$\vdots$

Etape p (avec $p \in [[2, n]]$) : on suppose qu'on a trouvé $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_{p-1}$ tels que $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_{p-1}$ sont deux à deux orthogonaux et unitaires et tels que $\text{Vect}(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_{p-1}) = \text{Vect}(e_1, \cdots, e_{p-1})$.
Problème : trouver $\epsilon_p' \in \text{vect}(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_{p-1}, e_p) = \text{Vect}(e_1, \cdots, e_{p-1}, e_p)$ sous la forme $\epsilon_p' = \alpha_1\epsilon_1 + \cdots + \alpha_{p-1}\epsilon_{p-1} + e_p$ tel que

$$S = \left\{\begin{array}{c} (\epsilon_p'|\epsilon_1) = 0 \\ \vdots \\ (\epsilon_p'|\epsilon_{p-1}) = 0 \end{array}\right. \text{ ssi } \left\{\begin{array}{c} \alpha_1(\epsilon_1|\epsilon_1) + \cdots + \alpha_{p-1}(\epsilon_{p-1}|\epsilon_1) + (e_p|\epsilon_1) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1(\epsilon_1|\epsilon_{p-1}) + \cdots + \alpha_{p-1}(\epsilon_{p-1}|\epsilon_{p-1}) + (e_p|\epsilon_{p-1}) = 0 \end{array}\right.$$

$$\text{ssi } \left\{\begin{array}{c} \alpha_1 + (e_p|\epsilon_1) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{p-1} + (e_p|\epsilon_{p-1}) = 0 \end{array}\right. \text{ ssi } \left\{\begin{array}{c} \alpha_1 = -(e_p|\epsilon_1) \\ \vdots \\ \alpha_{p-1} = -(e_p|\epsilon_{p-1}) \end{array}\right.$$

On pose ensuite $\epsilon_p = \dfrac{1}{||\epsilon_p'||}\epsilon_p'$. ϵ_p est unitaire et on vérifie bien que $(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_p)$ est une famille orthonormée de vecteurs de $\text{vect}(e_1, \cdots, e_p)$. Donc $\text{Vect}(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_p) = \text{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$.
A l'étape n : on a obtenu une base orthonormée de E. D'où le théorème suivant :

Théorème 2.

Tout espace euclidien possède une base orthonormée.

▶ Exemple 6

1. $E = \mathbb{R}^3$. $(i, j, k) = \mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. E est muni du produit scalaire habituel.
   $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (u_1, u_2, u_3) est une base de E. Orthonormaliser cette base.
2. $E = \mathbb{R}^3$. On définit l'application ϕ sur $E \times E$ par $\forall u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\forall v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\phi(u, v) = xx' + 2yy' + 5zz' + xy' + x'y + 2yz' + 2y'z$.
   (a) Montrer que ϕ est un produit scalaire.
   (b) $(i, j, k) = \mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Orthonormaliser $\mathcal{B}$ pour ϕ.

Propriété 12 (Expression du produit scalaire et de la norme).

Soit E un espace euclidien de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base ***orthonormée*** *de E.* $\forall u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \in E$, $\forall v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \in E$, $(u|v) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ *et* $||u|| = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

2.2 Orthogonalité

Théorème 3.

Soit F un sous-espace vectoriel de E, espace euclidien de dimension n.

1. *$F^{\perp}$ et F sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.*
2. *$dim(F^{\perp}) = dim(E) - dim(F)$.*
3. *$(F^{\perp})^{\perp} = F$.*

Théorème 4 (Théorème de la base orthonormée incomplète).

Soit $\mathcal{F} = (e_1, \cdots, e_p)$ une famille orthonormée de E (avec $p \leq n$). $\mathcal{F}$ peut être complétée en une base orthonormée de E.

2.3 Projections et symétries orthogonales

Définition 11.

Soit F un sous-espace vectoriel de E.
*On appelle **projection orthogonale sur** F et on note p_F la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$.*
*On appelle **symétrie orthogonale par rapport à** F et on note s_F la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^{\perp}$.*

Remarque 5 (Rappels)**.** $\forall u \in E,\ \exists!(u_1, u_2) \in F \times F^{\perp},\ u = u_1 + u_2$.
$p_F(u) = u_1$.
$s_F(u) = u_1 - u_2 = 2p_F(u) - u$.
$s_F = 2p_F - id_E$.

Propriété 13 (Expression de la projection orthogonale d'un vecteur).

*Soit $(E, (.|.))$ un espace vectoriel euclidien et $F = \text{Vect}\,(e_1, ..., e_p)$ un sous-espace vectoriel de E tel que $(e_1, ..., e_p)$ est une famille **orthonormée** ; soit p_F la projection orthogonale sur F et $p_{F^{\perp}}$ la projection orthogonale sur $F^{\perp}$ alors*

$$\forall x \in E \quad p_F\,(x) = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)e_i$$

Remarque 6. *On a également avec les mêmes notations : $p_{F^{\perp}}\,(x) = \displaystyle\sum_{i=p+1}^{n} (x|e_i)e_i$ et $p_F(x) + p_{F^{\perp}}\,(x) = x$.*

Propriété 14.

Soit p la projection orthogonale sur F alors
x est orthogonal à F ssi $p(x) = 0_E$.
$Ker(p)$ est l'ensemble des vecteurs orthogonaux aux vecteurs de F, cad $Ker(p) = F^{\perp}$.

► Exemple 7 Soit $E = \mathbb{R}^2$, $D = \text{Vect}(t)$ où $t = (1, 2)$ et p la projection orthogonale sur D.

1. Soit $u = (x, y)$. Déterminer $p(u)$.
2. Déterminer la matrice de p dans la base canonique de E.
3. Déterminer une base orthonormale $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle $mat_{\mathcal{C}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Quel est le lien entre ces deux matrices ?

► Exemple 8 On considère la projection orthogonale f de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \dfrac{1}{13}\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$. Préciser l'élément caractéristique de f.

Propriété 15 (Inégalité de Bessel).

Soit $(E, (.|.))$ un espace vectoriel euclidien, F un sous-espace vectoriel de E et p_F la projection orthogonale sur F. Alors $\forall x \in E \quad ||p_F(x)|| \leq ||x||$.

Définition 12.

Une symétrie s de E est dite orthogonale lorsque $p = \dfrac{1}{2}(s + \mathrm{Id})$ est une projection orthogonale.

2.4 Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel

Définition 13 (Distance d'un vecteur à une partie de E).

Soient $x \in E$ et A une partie non vide de E.
$d(x, A) = inf_{y \in A}||x - y|| \in \mathbb{R}^+$.

Propriété 16.

Soit F un sous-espace vectoriel de E et $x \in E$. Il existe un unique vecteur $y \in F$ tel que $d(x, F) = ||x - y||$ et $y = p_F(x)$ (projeté orthogonal de x sur F).
$d(x, F) = ||x - p_F(x)|| = ||p_{F^\perp}(x)||$.

▶ Exemple 9
On considère $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique
et F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = x - y + z - t = 0\}$.

1. Ecrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur F.
2. Calculer $d(u, F)$ où $u = (1, 2, 3, 4)$.

3 Exercices

Exercice 1. *Réfce 260*
Sur $\mathbb{R}_2[X]$ on définit : $< P, Q >=< a_0 + a_1X + a_2X^2, b_0 + b_1X + b_2X^2 >= (a_0 + a_1)b_0 + (a_0 + 3a_1)b_1 + 3a_2b_2$.
Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 2. *Réfce 261*
Pour $P,\ Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit l'application $\varphi\ :\ (P, Q) \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 3. *Réfce 262*
On note E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.
Pour $(f, g) \in E^2$, on note $\varphi(f, g) = f(0)g(0) + \displaystyle\int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt$. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

Exercice 4. *Réfce 263*

1. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ des réels strictement positifs tels que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geq n^2$.*
2. *Montrer que $\forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$. Quand a-t-on égalité ?*

Exercice 5. *Réfce 265*
Dans $\mathbb{R}^4$ rapporté à sa base canonique et muni de son produit scalaire canonique, on considère le sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$, où $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (-1, -1, -2, 2)$, $u_3 = (-1, 5, -4, 8)$ et $u_4 = (-3, 1, -5, 3)$. Déterminer un système d'équations et une base orthonormale de $F^\perp$ puis de F.

Exercice 6. *Réfce 266*
Soit $u_1 = (1, 2, -1, 1)$ *et* $u_2 = (0, 3, 1, -1)$ *dans* $\mathbb{R}^4$*, muni de son produit scalaire usuel. On pose* $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$*. Déterminer une base orthonormée de* $F^\perp$*.*

Exercice 7. *Réfce 268* $E = \mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ *est muni du produit scalaire :* $< f, g >= \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (fg)(t)\mathrm{d}t$*. Soient les applications* $\{f_n \ : \ t \mapsto \cos nt\}_{n\geq 0}$ *et* $\{g_n \ : \ t \mapsto \sin nt\}_{n\geq 1}$*.*

1. *Calculer pour tout couple* (p, q) *d'entiers les produits scalaires :* $< f_p, f_q >$*,* $< f_p, g_q >$ *et* $< g_p, g_q >$*.*
2. *Montrer que pour tout* $n \geq 1$*,* $(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f_0, \frac{1}{\sqrt{\pi}} f_1, \frac{1}{\sqrt{\pi}} g_1, \cdots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} f_n, \frac{1}{\sqrt{\pi}} g_n)$ *est une famille orthonormale de* E*.*

Exercice 8. *Réfce 269*

1. *Soit* $E = \mathbb{R}^3$*,* $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 2z = 0\}$ *et* p *la projection orthogonale sur* P*.*
   (a) *Soit* $u = (x, y, z)$*. Déterminer* $p(u)$*.*
   (b) *Déterminer la matrice* M *de* p *dans la base canonique de* E*.*
   (c) *Déterminer une b.o.n.* $\mathcal{C}$ *de* E *telle que* $Mat_{\mathcal{C}}(p) = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$*. Expliciter le lien entre* D *et* M*.*
2. *Déterminer par deux méthodes la projection orthogonale de* $(1, 1, 0)$ *sur le plan d'équation* $x + y = z$*.*
3. *Soit* f *projection orthogonale de* $\mathbb{R}^3$ *dont la matrice dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *est* $C = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$*.*

   Déterminer l'élément caractéristique de f*.*

Exercice 9. *Réfce 271*
Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x - 2y + 3z = 0$*.*

Exercice 10. *Réfce 272*
Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathbb{R}(\vec{i} - 4\vec{k})$*.*

Exercice 11. *Réfce 274*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$*. Soit* p *un projecteur orthogonal de* $\mathbb{R}^n$*. On note* $(u|v)$ *le produit scalaire de* u *par* v*. Montrer que :*

1. *Pour tout* $u \in \mathbb{R}^n$*,* $||p(u)|| \leq ||u||$*.*
2. *Montrer que pour tout* $(u, v) \in (\mathbb{R}^n)^2$*,* $(u|p(v)) = (p(u)|v)$*.*

Exercice 12. *Réfce 276*
Soit u *un endomorphisme de* $\mathbb{R}^n$*. Montrer que si* u *conserve le produit scalaire, c'est-à-dire si pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$ *et pour tout* $y \in \mathbb{R}^n$*,* $< x, y >=< u(x), u(y) >$*, alors* u *est bijectif.*

Exercice 13. *Réfce 277*

1. *Déterminer une base orthonormale de* $\mathbb{R}_1[X]$ *pour le produit scalaire défini par* $(P|Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t).Q(t).\mathrm{d}t$*.*
2. *En déduire le calcul de* $I = \mathrm{Inf}_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \displaystyle\int_0^1 (t^2 - at - b)^2.\mathrm{d}t$*, après en avoir justifié l'existence.*

Exercice 14. *Réfce 278*
On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *du produit scalaire* $< A, B >= tr({}^tAB)$*.*

1. *Soit* $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$*. Calculer la distance de* M *à* $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$*.*
2. *Soit* H *l'ensemble des matrices de trace nulle de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*. Montrer que* H *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et donner sa dimension. Soit* J *la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer la distance de* J *à* H*.*