TD31 Espaces préhilbertiens

Exercice 1. *Réfce 260*
Sur $\mathbb{R}_2[X]$ on définit : $< P, Q >=< a_0 + a_1X + a_2X^2, b_0 + b_1X + b_2X^2 >= (a_0 + a_1)b_0 + (a_0 + 3a_1)b_1 + 3a_2b_2$. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 2. *Réfce 261*
Pour $P,\ Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit l'application $\varphi\ :\ (P, Q) \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 3. *Réfce 262*
On note E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.
Pour $(f, g) \in E^2$, on note $\varphi(f, g) = f(0)g(0) + \displaystyle\int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt$. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

Exercice 4. *Réfce 263*

1. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ des réels strictement positifs tels que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geq n^2$.*
2. *Montrer que $\forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$. Quand a-t-on égalité ?*

Exercice 5. *Réfce 265*
Dans $\mathbb{R}^4$ rapporté à sa base canonique et muni de son produit scalaire canonique, on considère le sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$, où $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (-1, -1, -2, 2)$, $u_3 = (-1, 5, -4, 8)$ et $u_4 = (-3, 1, -5, 3)$. Déterminer un système d'équations et une base orthonormale de $F^\perp$ puis de F.

Exercice 6. *Réfce 266*
Soit $u_1 = (1, 2, -1, 1)$ et $u_2 = (0, 3, 1, -1)$ dans $\mathbb{R}^4$, muni de son produit scalaire usuel. On pose $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$. Déterminer une base orthonormée de $F^\perp$.

Exercice 7. *Réfce 268* *$E = \mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ est muni du produit scalaire : $< f, g >= \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (fg)(t)\mathrm{d}t$. Soient les applications $\{f_n\ :\ t \mapsto \cos nt\}_{n \geq 0}$ et $\{g_n\ :\ t \mapsto \sin nt\}_{n \geq 1}$.*

1. *Calculer pour tout couple (p, q) d'entiers les produits scalaires : $< f_p, f_q >$, $< f_p, g_q >$ et $< g_p, g_q >$.*
2. *Montrer que pour tout $n \geq 1$, $(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f_0, \frac{1}{\sqrt{\pi}} f_1, \frac{1}{\sqrt{\pi}} g_1, \cdots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} f_n, \frac{1}{\sqrt{\pi}} g_n)$ est une famille orthonormale de E.*

Exercice 8. *Réfce 269*

1. *Soit $E = \mathbb{R}^3$, $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 2z = 0\}$ et p la projection orthogonale sur P.*
   (a) *Soit $u = (x, y, z)$. Déterminer $p(u)$.*
   (b) *Déterminer la matrice M de p dans la base canonique de E.*
   (c) *Déterminer une b.o.n. $\mathcal{C}$ de E telle que $Mat_{\mathcal{C}}(p) = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Expliciter le lien entre D et M.*
2. *Déterminer par deux méthodes la projection orthogonale de $(1, 1, 0)$ sur le plan d'équation $x + y = z$.*

3. *Soit f projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est* $C = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

   Déterminer l'élément caractéristique de f.

Exercice 9. *Réfce 271*
Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x - 2y + 3z = 0$.

Exercice 10. *Réfce 272*
Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathbb{R}(\vec{i} - 4\vec{k})$.

Exercice 11. *Réfce 274*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit p un projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^n$. On note $(u|v)$ le produit scalaire de u par v. Montrer que :

1. *Pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, $||p(u)|| \leq ||u||$.*
2. *Montrer que pour tout $(u, v) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $(u|p(v)) = (p(u)|v)$.*

Exercice 12. *Réfce 276*
Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si u conserve le produit scalaire, c'est-à-dire si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $< x, y > = < u(x), u(y) >$, alors u est bijectif.

Exercice 13. *Réfce 277*

1. *Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_1[X]$ pour le produit scalaire défini par* $(P|Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t).Q(t).\mathrm{dt}$.
2. *En déduire le calcul de* $I = \mathrm{Inf}_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \displaystyle\int_0^1 (t^2 - at - b)^2.\mathrm{dt}$, *après en avoir justifié l'existence.*

Exercice 14. *Réfce 278*
On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $< A, B > = tr({}^tAB)$.

1. *Soit* $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. *Calculer la distance de M à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.*
2. *Soit H l'ensemble des matrices de trace nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner sa dimension. Soit J la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer la distance de J à H.*