Exo Réfce 263

① $E = \mathbb{R}^n$ $\quad u = \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)$ et $v = (\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n})$.

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|$

on a donc $\left| \frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_1}} + \dots + \frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_n}} \right| = |1 + \dots + 1| = n \leq \sqrt{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} \times \sqrt{a_1 + \dots + a_n}$

or $a_1 + \dots + a_n = 1$ donc $n \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}$ donc $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geqslant n^2$.

② $E = \mathbb{R}^n$ $\quad u = (x_1, \dots, x_n)$ et $v = (1, \dots, 1)$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|$

donc $|x_1 + \dots + x_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \sqrt{1^2 + \dots + 1^2}$

donc $|x_1 + \dots + x_n| \leq \sqrt{n} \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ donc $(x_1 + \dots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + \dots + x_n^2)$

Il y a égalité ssi la famille (u, v) est liée càd si u s'écrit $k(1, \dots, 1)$, $k \in \mathbb{R}$.

Ex 5. Exercice 265 Produit scalaire

- $u\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in F^{\perp}$ ssi $\begin{cases} u \perp u_1 \\ u \perp u_2 \\ u \perp u_3 \\ u \perp u_4 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} (u|u_1)=0 \\ (u|u_2)=0 \\ (u|u_3)=0 \\ (u|u_4)=0 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ -x-y-2z+2t=0 \\ -x+5y-4z+8t=0 \\ -3x+y-5z+3t=0 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & -4 & 8 & 0 \\ -3 & 1 & -5 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4 \leftarrow 3L_1+L_4]{\substack{L_2 \leftarrow L_1+L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1+L_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2 \\ L_4 \leftarrow \frac{1}{2}L_4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Il y a une inconnue secondaire.
Le système initial est donc équivalent au système suivant. $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 2y-z+3t=0 \\ -z+3t=0 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$

ssi $\begin{cases} x=-4t \\ y=0 \\ z=3t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$ donc $F^{\perp} = \{(-4t, 0, 3t, t), t \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(\{(-4,0,3,1)\})$
C'est une droite vectorielle. Dim $F^{\perp} = 1$
Une base de $F^{\perp}$ est $((-4,0,3,1))$
donc base orthonormale de $F^{\perp}$ est $\left(\frac{1}{\sqrt{26}}(-4,0,3,1)\right)$

- On sait que F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$
donc $\dim F = \dim \mathbb{R}^4 - \dim F^{\perp} = 4-1 = 3$.
On cherche une base de F. On vérifie que (u_1, u_2, u_3) est une famille libre. Comme elle a 3 éléments, ce sera bien une base de F.
$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^4} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + (-\lambda_2) - \lambda_3 = 0 & (1) \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 & (2) \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} (2)-(1) \Rightarrow 6\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \quad (3) \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \quad (4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ (3)+(4) \Rightarrow 2\lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Orthonormalisons cette base grâce au procédé de Gram-Schmidt.

- on pose $\varepsilon_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1 = \frac{1}{2} u_1 \Rightarrow \varepsilon_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{1}{2}(1,1,1,1) = \varepsilon_1}$
- on veut que $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$. Pour cela on pose $\varepsilon'_2 = \alpha \varepsilon_1 + u_2$
$(\varepsilon'_2 | \varepsilon_1) = 0 \Rightarrow (\alpha\varepsilon_1 + u_2 | \varepsilon_1) = 0 \Rightarrow \alpha(\varepsilon_1|\varepsilon_1) + (u_2|\varepsilon_1) = 0 \Rightarrow \alpha = -(u_2|\varepsilon_1) = 1$.
Donc $\varepsilon'_2 = \varepsilon_1 + u_2 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$. Enfin $\varepsilon_2 = \frac{1}{\|\varepsilon'_2\|}\varepsilon'_2 = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) = \boxed{\frac{1}{6}(-1,-1,-3,5) = \varepsilon_2}$
- on veut que $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$. Pour cela on pose $\varepsilon'_3 = \alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 + u_3$
$(\varepsilon'_3|\varepsilon_1) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -(u_3|\varepsilon_1) = -4$ et $(\varepsilon'_3|\varepsilon_2) = 0 \Rightarrow \alpha_2 = (u_3|\varepsilon_2) = -8$
donc $\varepsilon'_3 = -4\varepsilon_1 - 8\varepsilon_2 + u_3 = \frac{1}{3}(-5, 13, -6, -2)$
et $\varepsilon_3 = \frac{1}{\|\varepsilon'_3\|}\varepsilon'_3 = \frac{1}{\sqrt{234}} \cdot \frac{1}{3}(-5,13,-6,-2) = \frac{3}{3\sqrt{13 \times 9 \times 2}}(-5,13,-6,-2) = \boxed{\frac{1}{3\sqrt{26}}(-5,13,-6,-2) = \varepsilon_3}$

Concl : $\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{3}{6}, \frac{5}{6}\right), \frac{1}{3\sqrt{26}}(-5,13,-6,-2)\right)$ est une base orthonormale de F.

Ex 8 suite

② • Déterminons une bo de $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } x+y=z\}$

$F = \{(x,y,x+y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((1,0,1),(0,1,1))$

$((1,0,1),(0,1,1))$ est une base de F car c'est une famille libre (2 vecteurs non colinéaires). Orthonormalisons la. Posons $e_1 = (1,0,1)$ et $e_2 = (0,1,1)$.

$\varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt2}, 0, \frac{1}{\sqrt2}\right)$

$\varepsilon'_2 = \alpha_1 \varepsilon_1 + e_2 \qquad \varepsilon'_2 \cdot \varepsilon_1 = 0$ ssi $\alpha_1 \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1 + e_2 \cdot \varepsilon_1 = 0$ ssi $\alpha_1 = -e_2 \cdot \varepsilon_1 = -\frac{1}{\sqrt2}$

$\varepsilon'_2 = -\frac{1}{\sqrt2}\left(\frac{1}{\sqrt2}, 0, \frac{1}{\sqrt2}\right) + (0,1,1) = \left(-\frac12, 0, -\frac12\right) + (0,1,1) = \left(-\frac12, 1, \frac12\right)$

$\|\varepsilon'_2\| = \sqrt{\frac14 + 1 + \frac14} = \sqrt{\frac32}$ donc $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon'_2}{\|\varepsilon'_2\|} = \frac{\sqrt2}{\sqrt3}\left(-\frac12, 1, \frac12\right) = \left(\frac{-1}{\sqrt6}, \frac{\sqrt2}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt6}\right)$

$(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une bo de F

Soit $u = (1,1,0)$

$p(1,1,0) \underset{\text{prop 13}}{=} \sum_{i=1}^{2} (u|\varepsilon_i)\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt2}\varepsilon_1 + \left(-\frac{1}{\sqrt6} + \frac{\sqrt2}{\sqrt3}\right)\varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt2}\left(\frac{1}{\sqrt2}, 0, \frac{1}{\sqrt2}\right) + \frac{1}{\sqrt6}\left(\frac{-1}{\sqrt6}, \frac{\sqrt2}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt6}\right)$

$p(1,1,0) = \left(\frac12, 0, \frac12\right) + \left(-\frac16, \frac13, \frac16\right) = \left(\frac13, \frac13, \frac23\right)$

• méthode 2 : on détermine $p_{F^\perp}(1,1,0)$ puis on dit que $p(1,1,0) = (1,1,0) - p_{F^\perp}(1,1,0)$

Une base de $F^\perp$ est $((1,1,-1))$ puis que $\dim F^\perp = \dim \mathbb{R}^3 - \dim F = 3-2 = 1$ et que $(1,1,-1)$ est un vecteur normal à F.

Une bo de $F^\perp$ est $\left(\left(\frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}, \frac{-1}{\sqrt3}\right)\right) = (\varepsilon_3)$

$p_{F^\perp}(1,1,0) \underset{\text{prop 13}}{=} (u|\varepsilon_3)\cdot\varepsilon_3 = \frac{2}{\sqrt3}\left(\frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}, \frac{-1}{\sqrt3}\right) = \left(\frac23, \frac23, -\frac23\right)$

donc $p_F(1,1,0) = (1,1,0) - \left(\frac23, \frac23, -\frac23\right) = \left(\frac13, \frac13, \frac23\right)$

Cette méthode est donc plus rapide.

③ L'élément caractéristique de F est l'ensemble des vecteurs invariants de $\mathbb{R}^3$ par f. Soit $u(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ alors $f(u) = u$

ssi $\mathrm{mat}_{B_c}(f(u)) = \mathrm{mat}_{B_c}(u)$ ssi $C\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ où B_c base can de $\mathbb{R}^3$

ssi $6C\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ ssi $\begin{cases} 5x-2y+z = 6x \\ -2x+2y+2z = 6y \\ x+2y+5z = 6z \end{cases}$ ssi $\begin{cases} -x-2y+z = 0 \\ -2x-4y+2z = 0 \\ x+2y-z = 0 \end{cases}$

ssi $x + 2y = z$

f est donc la projection orthogonale sur le plan d'équation $x+2y=z$

Ex 8 Rétro 269

① ⓐ $P = \{(-2y-2z, y, z),\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((-2,1,0), (-2,0,1))$

$((-2,1,0), (-2,0,1))$ est une base de P car c'est une famille libre (2 vecteurs non colinéaires).

Orthonormalisons-la. Posons $e_1 = (-2,1,0)$ et $e_2 = (-2,0,1)$

$\varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$

$\varepsilon'_2 = \alpha_1 \varepsilon_1 + e_2$ $\quad \varepsilon'_2 \cdot \varepsilon_1 = 0$ ssi $\alpha_1 \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1 + e_2 \cdot \varepsilon_1 = 0$ ssi $\alpha_1 = -e_2 \cdot \varepsilon_1 = -\frac{4}{\sqrt{5}}$

$\varepsilon'_2 = -\frac{4}{\sqrt{5}}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right) + (-2,0,1) = \left(\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}, 0\right) + (-2,0,1) = \left(-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, 1\right)$

$\|\varepsilon'_2\| = \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{16}{25} + 1} = \sqrt{\frac{45}{25}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ $\qquad \varepsilon_2 = \frac{5}{3\sqrt{5}}\left(-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, 1\right)$

$\varepsilon_2 = \left(-\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{-4}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}\right)$

$(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une bo de P

soit $u = (x,y,z)$

$p(u) \underset{\text{prop 13}}{=} \sum_{i=1}^{2} (u|\varepsilon_i)\varepsilon_i = (u|\varepsilon_1)\varepsilon_1 + (u|\varepsilon_2)\varepsilon_2$

$= \frac{-2x+y}{\sqrt{5}}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right) + \left(\frac{-2x-4y+5z}{3\sqrt{5}}\right)\left(\frac{-2}{3\sqrt{5}}, \frac{-4}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}\right)$

$p(u) = \left(\frac{4x-2y}{5}, \frac{-2x+y}{5}, 0\right) + \left(\frac{4x+8y-10z}{45}, \frac{8x+16y-20z}{45}, \frac{-2x-4y+5z}{9}\right)$

$p(u) = \left(\frac{40x-10y-10z}{45}, \frac{-10x+25y-20z}{45}, \frac{-2x-4y+5z}{9}\right)$

① ⓑ

$$M = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} p(i) & p(j) & p(k) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} i \\ j \\ k \end{array} \end{array}$$

où $i = (1,0,0)$, $j = (0,1,0)$, $k = (0,0,1)$.

① ⓒ $\dim P = 2$ et P et $P^\perp$ sont suppl dans $\mathbb{R}^3$ donc $\dim P^\perp = \dim \mathbb{R}^3 - \dim P = 1$

or $(1,2,2)$ est un vecteur normal à P donc appartient à $P^\perp$

donc $\varepsilon_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ est une bo de $P^\perp$ et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une bo de P

Ainsi $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une famille orthonormée de $\mathbb{R}^3$ donc elle est libre et elle a 3 élts donc c'est une bo de $\mathbb{R}^3$

tq $D = \text{mat}_{\mathcal{E}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ car $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in P \Rightarrow p(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$, $p(\varepsilon_2) = \varepsilon_2$

$\varepsilon_3 \in P^\perp \Rightarrow p(\varepsilon_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$

$D = P_{B_c \mathcal{E}}^{-1} M P_{B_c \mathcal{E}}$ (M et D sont semblables)