Ex 11 Rétco 274

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et p un projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^n$

① c'est l'inégalité de Bessel, voir cours

② Soient u et v deux éléments de $\mathbb{R}^n$

$\exists!\ u_1 \in \operatorname{Ker}p\ \exists!\ u_2 \in \operatorname{Im}p$ tq $u = u_1 + u_2$. On a $p(u) = u_2$

$\exists!\ v_1 \in \operatorname{Ker}p\ \exists!\ v_2 \in \operatorname{Im}p$ tq $v = v_1 + v_2$. On a $p(v) = v_2$

$$(u \mid p(v)) = (u_1 + u_2 \mid v_2) = \underbrace{(u_1 \mid v_2)}_{=0} + (u_2 \mid v_2) = (u_2 \mid v_2)$$

$=0$ car Ker p et Im p sont supplémentaires orthogonaux

$$(p(u) \mid v) = (u_2 \mid v_1 + v_2) = \underbrace{(u_2 \mid v_1)}_{=0} + (u_2 \mid v_2) = (u_2 \mid v_2$$

$=0$ pour les mêmes raisons

Donc $(u \mid p(v)) = (p(u) \mid v)$.

Ex 12 Rétco 275

$u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathbb{R}^n$ est un ev de dimension n donc

u bij $\Leftrightarrow$ u inj $\Leftrightarrow$ u surj

Mq u est injectif en déterminant Ker u. Mq $\operatorname{Ker} u \subset \{0_{\mathbb{R}^n}\}$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tq $x \in \operatorname{Ker} u$

Alors $u(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$

Or $\langle x, y \rangle = \langle u(x), u(y) \rangle$ $\forall x \in \mathbb{R}^n\ \forall y \in \mathbb{R}^n$ donc

en particulier $\langle x, x \rangle = \langle u(x), u(x) \rangle$

càd $\|x\|^2 = \|u(x)\|^2 = \|0_{\mathbb{R}^n}\|^2 = 0_{\mathbb{R}}$

donc $\|x\| = 0_{\mathbb{R}}$ et la norme est donc $x = 0_{\mathbb{R}^n}$

Ainsi $\operatorname{Ker} u \subset \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et comme $\{0_{\mathbb{R}^n}\} \subset \operatorname{Ker} u$ (car Ker u sev de E), on en déduit que $\operatorname{Ker} u = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$

Donc u est inj donc u est bij.