Chapitre 34 : Familles sommables

Concernant les sommes contenant un nombre fini de termes, on sait qu'il y a commutativité ($a+b=b+a$) et associativité ($a+(b+c)=(a+b)+c$).
Dans le cas d'un nombre infini de termes, peut-on espérer une "commutativité généralisée" et une "associativité généralisée" avec la façon précédente de définir la somme S ? On l'aura dans certains cas mais pas toujours. La raison est simple : permuter des termes (commutativité) ou regrouper des termes (associativité) dans le terme général (u_n) de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ implique de considérer <u>un nouveau terme général</u> (u'_n) et donc <u>une nouvelle série</u> $\sum_{n\geqslant 0} u'_n$ (il est fondamental de se rappeler ici que les suites (u_n) et (S_n), suite des sommes partielles, comme toutes les suites, sont des objets ordonnés, par les indices). Les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} u'_n$ n'ont aucune raison d'être de même nature, et en cas de convergence, les sommes $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} u'_n$ n'ont aucune raison d'être égales.
Voici un exemple d'absence d'associativité généralisée :
on considère le terme général $(u_n)_{n\geqslant 1} = \big((-1)^n\big)_{n\geqslant 1} = (-1,1,\dots)$. La série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ diverge (grossièrement) car son terme général ne tend pas vers zéro. En regroupant les termes deux par deux à partir du premier terme, on obtient une nouvelle suite $(u'_n)_{n\geqslant 1} = (0,0,\dots)$ qui cette fois donne une série $\sum_{n\geqslant 1} u'_n$ convergente de somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u'_n = 0$; en regroupant les termes de manière encore différente (deux par deux à partir du deuxième terme), on obtient une nouvelle suite $(u''_n)_{n\geqslant 1} = (-1,0,\dots)$ qui donne également une série $\sum_{n\geqslant 1} u''_n$ convergente, mais de somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u''_n = -1$.
Conclusion : un regroupement des termes d'une série peut donc modifier sa nature ou la valeur de sa somme.

La notion de famille sommable permet de donner un sens différent à "la somme d'une infinité de termes (réels ou complexes)" $\sum_{i\in I} u_i$: on utilisera des sommes finies mais sans processus de passage à la limite (comme c'est le cas pour les séries numériques). La définition ne fera pas référence à l'éventuelle existence d'une relation d'ordre dans l'ensemble I des valeurs de l'indice (comme c'est le cas pour les séries numériques). On demandera juste à l'ensemble I d'être dénombrable, i.e. en bijection avec l'ensemble $\mathbb{N}$. On pourra donc donner un sens à des sommes du type $\sum_{i\in I} u_i$ où I est un ensemble dénombrable :
$$\sum_{i\in\mathbb{Q}^*} \frac{1}{i^2} \quad , \quad \sum_{i\in\mathbb{Z}^*} \frac{(-1)^i}{i^2} \quad , \quad \sum_{i=(m,n)\in\mathbb{N}_*^2} \frac{1}{m^2n^2} \ .$$

1 Familles sommables de réels positifs

Dans la suite du chapitre, I désigne un ensemble dénombrable.
Pour définir la notion de famille sommable et la notation $\sum_{i\in I} u_i$, nous utiliserons des parties finies de I (pas de sommes partielles ici).

Rappels : borne supérieure d'une partie non vide de $\mathbb{R}$.
Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. La borne supérieure de A, notée $\sup(A)$*, est le plus petit des majorants de A (caractérisation extérieure). On a également une caractérisation intérieure : $s=\sup(A)$ si et seulement si :*

$$\begin{cases} \forall a \in A,\ a \leqslant s, \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ s - \varepsilon < a. \end{cases}$$ *Schéma :*

Si A n'est pas majorée, alors on pose $\sup(A) = +\infty$.

Une partie non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure finie si et seulement si elle est majorée.

Si la partie A est décrite à l'aide d'une variable x : $A = \{a(x),\ x \in D\}$, on utilisera la notation $\sup\limits_{x \in D} a(x)$ pour désigner $\sup A$.

Définition 1 (Famille indexée par I).

Une famille d'éléments d'un ensemble E, indexée par I, est une application $u : I \to E$. La notation fonctionnelle $u : I \to E,\ i \mapsto u(i)$, peut être remplacée par la notation indicielle $(u_i)_{i \in I}$.

Exemple : $\left(\dfrac{1}{1+i}\right)_{i \in \mathbb{N}}$, $\left(\dfrac{1}{i^2}\right)_{i \in \mathbb{Q}^*}$, $\left(\dfrac{\ln(|i|)}{i^2}\right)_{i \in \mathbb{Z}^*}$, $\left(\dfrac{1}{m^2 n^2}\right)_{i=(m,n) \in \mathbb{N}_*^2}$ sont des familles de réels positifs.

Notations : On note $\mathcal{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I.
Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs. Pour tout $J \in \mathcal{P}_f(I)$, on note $S_J = \sum\limits_{i \in J} u_i \in \mathbb{R}_+$.

Définition 2.

Une famille $(u_i)_{i \in I}$ de nombres réels positifs est sommable ssi $\sup\limits_{J \in \mathcal{P}_f(I)} S_J$ est fini.
Autrement dit, une famille $(u_i)_{i \in I}$ de nombres réels positifs est sommable ssi l'ensemble

$$\{S_J,\ J \in \mathcal{P}_f(I)\} = \left\{\sum_{i \in J} u_i,\ J \in \mathcal{P}_f(I)\right\} \subset \mathbb{R}_+ \text{ est majoré, i.e. ssi}$$

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R}_+, \quad \forall J \in \mathcal{P}_f(I), \quad S_J = \sum_{i \in J} u_i \leqslant M.}$$

Dans ce cas, cette borne supérieure $\sup\limits_{J \in \mathcal{P}_f(I)} S_J = \sup\limits_{J \in \mathcal{P}_f(I)} \sum\limits_{i \in J} u_i$ est notée $\sum\limits_{i \in I} u_i$, et est appelée somme de la famille sommable $(u_i)_{i \in I}$.

Dans le cas où la famille $(u_i)_{i \in I}$ n'est pas sommable, on pose $\sum\limits_{i \in I} u_i = +\infty$.

Remarque : on considère donc l'ensemble des sommes de TOUTES les sous-familles finies de la famille $(u_i)_{i \in I}$, et on prend la borne supérieure de cet ensemble.

Comme dans le chapitre sur les séries numériques, nous allons établir des propriétés qui nous permettront d'éviter d'utiliser la définition. Cependant, certains cas peuvent se traiter directement avec la définition 2.

Exemple : Montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{2^i}\right)_{i \in \mathbb{N}}$ est sommable.
Exemple : Montrer que la famille $(u_i)_{i \in \mathbb{Q} \cap [0;1]} = (i)_{i \in \mathbb{Q} \cap [0;1]}$ n'est pas sommable
On théorise le premier exemple dans la propriété suivante (cette propriété affirme essentiellement que lorsque $I = \mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$), la notion de série numérique est suffisante).

Propriété 1 (Familles sommables et séries numériques).

Soit $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. La famille $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série numérique $\sum\limits_{i \geqslant 0} u_i$ converge, et dans ce cas $\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} u_i = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} u_i$.

Propriété 2 (Comparaison positive).

Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs vérifiant, pour tout $i \in I$, $0 \leqslant u_i \leqslant v_i$.
Si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est sommable, alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable et on a $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i \leqslant \sum_{i\in I} v_i$.
Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, alors la famille $(v_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable.

Preuve. Soit $J \in \mathcal{P}_f(I)$ une partie finie de I. On a (car $v_i \in \mathbb{R}_+$) :

$$S_J = \sum_{i\in J} u_i \leqslant \sum_{i\in J} v_i \leqslant \sum_{i\in I} v_i = M.$$

La famille $(u_i)_{i\in I}$ est donc sommable car $M = \displaystyle\sum_{i\in I} v_i$ (indépendant de J) convient dans la définition 3.

De plus, $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sup_{J\in\mathcal{P}_f(I)} S_J \leqslant M = \sum_{i\in I} v_i$. □

Propriété 3 (Combinaisons linéaires).

Si $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ sont deux familles sommables de réels positifs et si $\lambda \in \mathbb{R}_+$, alors la famille $(\lambda u_i + v_i)_{i\in I}$ est sommable et $\displaystyle\sum_{i\in I}(\lambda u_i + v_i) = \lambda \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$.

La propriété suivante généralise la notion de commutativité Dans le cas des sommes finies (par exemple avec $I = \{1, 2, 3\}$), on a
$\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = u_1 + u_2 + u_3 = u_1 + u_3 + u_2 = u_2 + u_1 + u_3 = u_2 + u_3 + u_1 = u_3 + u_1 + u_2 = u_3 + u_2 + u_1$.
On généralise cette notion aux familles sommables en utilisant des permutations des indices.
On rappelle qu'une permutation σ d'un ensemble I est une bijection $\sigma : I \longrightarrow I$.

Propriété 4 (Théorème de commutativité généralisée).

Cette propriété s'intitule aussi théorème de convergence commutative, théorème de réindexation ou théorème de permutation de l'ensemble des indices.
Soit σ une permutation de I. Une famille $(u_i)_{i\in I}$ de réels positifs est sommable si et seulement si la famille $(u_{\sigma(i)})_{i\in I}$ est sommable, et dans ce cas :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)}.$$

Remarque : En posant pour tout $i \in I$, $v_i = u_{\sigma(i)}$, il faut bien voir que fonctionnellement, les applications $u : I \to E$ et $v : I \to E$ sont différentes. Par exemple, dans le cas $I = \mathbb{N}$, $v(0) = u(\sigma(0))$, qui en général ne vaut pas $u(0)$. Par contre, le fait que σ soit une bijection permet d'obtenir la même somme. Les propriétés 1 et 4 donnent le corollaire suivant :

Corollaire 1.

Soit $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs et σ une permutation de $\mathbb{N}$. La série $\displaystyle\sum_{i\geqslant 0} u_i$ converge si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{i\geqslant 0} u_{\sigma(i)}$ converge, et dans ce cas, $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} u_i = \sum_{i=0}^{+\infty} u_{\sigma(i)}$.

La propriété suivante généralise la notion d'associativité. Voir problématique. Dans le cas des sommes finies (par exemple avec $I = \{1, 2, 3, 4\}$), on a

$\sum_{i\in I} u_i = u_1+u_2+u_3+u_4 = (u_1+u_2)+(u_3+u_4) = (u_1+u_2+u_3)+u_4 = u_1+(u_2+u_3+u_4)$.

On généralise cette notion aux familles sommables en utilisant des sommations par paquets. L'exemple ci-dessus fait apparaître les partitions suivantes de I : $I=\{1,2\}\cup\{3,4\},\ I=\{1,2,3\}\cup\{4\},\ I=\{1\}\cup\{2,3,4\}$.

Définition 3 (Partition).

Une partition de I est une famille de parties non vides de I, disjointes deux à deux, et dont la réunion est égale à I.

Propriété 5 (Théorème d'associativité généralisée ; théorème de sommation par paquets).

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de l'ensemble des indices I.
La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- *pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable (les sous-familles sont sommables),*
- *la série numérique $\sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$ converge.*

Dans ce cas, on a $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$.

La propriété précédente sert essentiellement à deux choses :

- Elle permet de montrer qu'une famille est sommable (en choisissant convenablement une partition de I), puis de calculer sa somme.
- En utilisant plusieurs partitions de I, elle donne des égalités entre des sommes de séries.

L'application suivante est fondamentale.
Application aux suites doubles $(u_i)_{i\in\mathbb{N}^2} = (u_{(p,q)})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ de réels positifs. Ici, $I=\mathbb{N}^2$.
Les trois partitions suivantes de $I=\mathbb{N}^2$ sont à connaître :

$$\mathbb{N}^2 = \bigcup_{p\in\mathbb{N}}\left\{(p,q)\in\mathbb{N}^2,\ q\in\mathbb{N}\right\} = \bigcup_{q\in\mathbb{N}}\left\{(p,q)\in\mathbb{N}^2,\ p\in\mathbb{N}\right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\underbrace{\left\{(p,q)\in\mathbb{N}^2,\ p+q=n\right\}}_{\Delta_n}.$$

Avec ces partitions, la propriété 5 donne le théorème de Fubini :

Théorème 1 ($I=\mathbb{N}^2$: théorème de Fubini).

Soit $(u_i)_{i\in\mathbb{N}^2} = (u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double de réels positifs.

- *$(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si pour tout $p\in\mathbb{N}$, la série numérique $\sum_{q\geqslant 0} u_{p,q}$ converge, et la série numérique $\sum_{p\geqslant 0}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)$ converge.*
- *$(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si pour tout $q\in\mathbb{N}$, la série numérique $\sum_{p\geqslant 0} u_{p,q}$ converge, et la série numérique $\sum_{q\geqslant 0}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)$ converge.*
- *$(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{p+q=n} u_{p,q}\right)$ converge (la somme à l'intérieur ne comporte qu'un nombre fini de termes).*

De plus, la somme de la famille sommable $(u_i)_{i\in\mathbb{N}^2} = (u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est alors égale à

$$\sum_{i\in\mathbb{N}^2} u_i = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) = \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n} u_{p,q}\right).$$

2 Familles sommables de réels quelconques et de complexes

Définition 4.

Une famille $(u_i)_{i\in I}$ de nombres complexes est sommable si et seulement si la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ de réels positifs est sommable. L'ensemble des familles sommables définies sur I se note $\ell^1(\mathbb{C})$.

Remarque : pour une famille de réels, la notation $|\cdot|$ représente la valeur absolue.

Propriété 6.

Toute sous-famille d'une famille sommable est sommable.
Si $(a_i)_{i\in I}$ est sommable et si $\epsilon > 0$, il existe une partie finie F de I telle que $|\sum_{i\in I} a_i - \sum_{i\in F} a_i| \leq \epsilon$.

2.1 Somme d'une famille sommable de réels

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombre réels. Soit $i \in I$. En notant $u_i^+ = \max\{u_i, 0\} \geqslant 0$ et $u_i^- = \max\{-u_i, 0\} \geqslant 0$, on a :

$$u_i = u_i^+ - u_i^-, \quad |u_i| = u_i^+ + u_i^-, \quad 0 \leqslant u_i^+ \leqslant |u_i|, \quad 0 \leqslant u_i^- \leqslant |u_i|.$$

On en déduit, par comparaisons positives, que les familles $(u_i^+)_{i\in I}$ et $(u_i^-)_{i\in I}$ de réels positifs sont sommables. On peut donc poser :

Définition 5.

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombre réels. On appelle somme de cette famille le nombre réel $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^-$.

2.2 Somme d'une famille sommable de complexes

Rappel : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x+iy| = \sqrt{x^2+y^2} \geqslant \sqrt{x^2} = |x|$ et $|x+iy| = \sqrt{x^2+y^2} \geqslant \sqrt{y^2} = |y|$.

Soit $(u_k)_{k\in I}$ une famille sommable de nombres complexes. Pour tout $k \in I$, on a $|\operatorname{Re}(u_k)| \leqslant |u_k|$ et $|\operatorname{Im}(u_k)| \leqslant |u_k|$.

On en déduit, par comparaisons positives, que les familles $(|\operatorname{Re} u_k|)_{k\in I}$ et $(|\operatorname{Im} u_k|)_{k\in I}$ de réels positifs sont sommables, i.e. que les familles $(\operatorname{Re} u_k)_{k\in I}$ et $(\operatorname{Im} u_k)_{k\in I}$ sont sommables.
On peut donc poser :

Définition 6.

Soit $(u_k)_{k\in I}$ une famille sommable de nombres complexes. On appelle somme de cette famille le nombre complexe $\sum_{k\in I} u_k = \sum_{k\in I} \operatorname{Re}(u_k) + i \sum_{k\in I} \operatorname{Im}(u_k)$,
i.e. en utilisant le paragraphe 2.1 :

$$\sum_{k\in I} u_k = \sum_{k\in I} \operatorname{Re}(u_k) + i \sum_{k\in I} \operatorname{Im}(u_k) = \sum_{k\in I} \operatorname{Re}(u_k)^+ - \sum_{k\in I} \operatorname{Re}(u_k)^- + i \left(\sum_{k\in I} \operatorname{Im}(u_k)^+ - \sum_{k\in I} \operatorname{Im}(u_k)^- \right).$$

Propriété 7 (Familles sommables et séries numériques).

Soit $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de réels ou de complexes. La famille $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série numérique $\sum_{i\geqslant 0} u_i$ converge absolument, et dans ce cas $\sum_{i\in\mathbb{N}} u_i = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i$.

Propriété 8 (Combinaisons linéaires).

Si $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ sont deux familles sommables de réels ou de complexes et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors la famille $(\lambda u_i + v_i)_{i\in I}$ est sommable et $\sum_{i\in I}(\lambda u_i + v_i) = \lambda \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$.

Propriété 9 (Théorème de commutativité généralisée).

Cette propriété s'intitule aussi théorème de convergence commutative, théorème de réindexation ou théorème de permutation de l'ensemble des indices.
Soit σ une permutation de I. Une famille $(u_i)_{i\in I}$ de réels ou complexes est sommable si et seulement si la famille $(u_{\sigma(i)})_{i\in I}$ est sommable, et dans ce cas :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)}.$$

Attention à la sommation par paquets ci-dessous, ce n'est pas une équivalence. Comparer avec la propriété 5. La propriété 10 est utile pour calculer la somme d'une famille sommable, pas pour montrer qu'elle est sommable.

Propriété 10 (Théorème d'associativité généralisée ; théorème de sommation par paquets).

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels ou complexes et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de l'ensemble des indices I.
***Si la famille** $(u_i)_{i\in I}$ **est sommable**, alors :*
- *pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable (les sous-familles sont sommables),*
- *la série numérique $\sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$ converge absolument,*

et $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$.

La réciproque est fausse : prenons $I = \mathbb{Z}$ et la famille $(u_i)_{i\in I} = (i)_{i\in\mathbb{Z}}$. Considérons la partition suivante $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Z}$: $I_n = \{-n, n\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable de somme $\sum_{i\in I_n} u_i = \sum_{i\in\{-n,n\}} i = 0$.

De plus, la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right) = \sum_{n\geqslant 0} 0$ est absolument convergente.
Pourtant, la famille $(u_i)_{i\in I} = (i)_{i\in\mathbb{Z}}$ n'est pas sommable (la sous-famille $(i)_{i\in\mathbb{N}}$ ne l'est pas par la propriété 1, car la série $\sum_{i\geqslant 0} i$ diverge).

Méthode : pour appliquer cette propriété, il faudra donc vérifier que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, i.e. vérifier que la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ de réels positifs est sommable (Définition 4). Pour cette famille de réels positifs, on peut bien sûr utiliser la propriété 5, qui est une équivalence (ne pas oublier de mettre des valeurs absolues dans la propriété 5).

En résumé, pour une famille de réels quelconques ou de complexes, si on veut appliquer la propriété 10 pour calculer $\sum_{i\in I} u_i$: on peut appliquer la propriété 5 pour montrer que cette famille est sommable, par condition suffisante de sommabilité (en utilisant une partition bien choisie de I) ; ensuite on peut appliquer la propriété 10, en utilisant également une partition bien choisie de I, mais qui peut être différente de la précédente.

3 Applications : sommes doubles et produit de Cauchy

Dans ce paragraphe, $I = \mathbb{N}^2$. On rappelle les trois partitions suivantes de $\mathbb{N}^2$ (à connaître) :

$$\mathbb{N}^2 = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \left\{(p,q)\in\mathbb{N}^2,\ q\in\mathbb{N}\right\} = \bigcup_{q\in\mathbb{N}} \left\{(p,q)\in\mathbb{N}^2,\ p\in\mathbb{N}\right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{(p,q)\in\mathbb{N}^2,\ p+q=n\right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n.$$

En utilisant ces trois partitions, on obtient la propriété suivante.

Théorème 2 ($I = \mathbb{N}^2$: théorème de Fubini).

Soit $(u_i)_{i\in\mathbb{N}^2} = (u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double de réels ou de complexes.

- *$(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si pour tout $p\in\mathbb{N}$, la série numérique $\sum_{q\geqslant 0}|u_{p,q}|$ converge, et la série numérique $\sum_{p\geqslant 0}\left(\sum_{q=0}^{+\infty}|u_{p,q}|\right)$ converge.*
- *$(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si pour tout $q\in\mathbb{N}$, la série numérique $\sum_{p\geqslant 0}|u_{p,q}|$ converge, et la série numérique $\sum_{q\geqslant 0}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}|u_{p,q}|\right)$ converge.*
- *$(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{p+q=n}|u_{p,q}|\right)$ converge (la somme à l'intérieur ne comporte qu'un nombre fini de termes).*

De plus, la somme de la famille sommable $(u_i)_{i\in\mathbb{N}^2} = (u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est alors égale à

$$\sum_{i\in\mathbb{N}^2} u_i = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) = \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n} u_{p,q}\right).$$

Dans le cas d'une famille double découplée, on a le résultat suivant.

Propriété 11.

Si $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_{i'})_{i'\in I'}$ sont deux familles sommables de réels quelconques ou de complexes, alors la famille $(u_i v_{i'})_{(i,i')\in I\times I'}$ est sommable et

$$\sum_{(i,i')\in I\times I'} u_i v_{i'} = \sum_{i\in I} u_i \times \sum_{i'\in I'} v_{i'}.$$

Remarque : ce résultat s'étend sans difficulté au cas d'un produit d'un nombre fini de familles sommables.

Dans le cas d'une suite double $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} = (a_p b_q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ découplée, on obtient le résultat suivant :

Propriété 12 (Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes).

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ deux séries de réels quelconques ou de complexes. Si ces deux séries sont absolument convergentes, alors la série produit de cauchy $\sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{p+q=n} a_p b_q\right)$ est absolument convergente, et on a

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n} a_p b_q\right).$$

Exemple : l'exponentielle complexe est un morphisme de $(\mathbb{C},+)$ dans $(\mathbb{C}^*,\times)$.

4 Exercices

Exercice 1. *Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles sommables de réels positifs.*

1. *Montrer que la famille $(u_i+v_i)_{i\in I}$ est sommable et que $\sum_{i\in I}(u_i+v_i) \leqslant \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$.*
2. *Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie $J \subset I$ telle que*

$$\sum_{i\in J}(u_i+v_i) \geqslant \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i - \varepsilon.$$

3. *Conclure.*

Exercice 2. *Les familles suivantes sont-elles sommables ? (a)* $\left(\dfrac{1}{(n+1)^3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *(b)* $\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *(c)* $\left(\dfrac{\sin n}{n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Exercice 3.

1. *Montrer que la famille (suite double)* $\left(\dfrac{1}{p^2q^3+1}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ *est sommable.*
2. *On note $A = \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ et $I = A\times A$. Montrer que la famille (suite double)* $\left(\dfrac{(-1)^p}{q^p}\right)_{(p,q)\in I}$ *est sommable et calculer sa somme* $S = \sum_{(p,q)\in I} \dfrac{(-1)^p}{q^p}$.
3. *Montrer que la famille (suite double) $(u_i)_{i\in\mathbb{N}^2} = (u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ définie par* $u_{p,q} = \dfrac{1}{p!q!(p+q+1)}$ *est sommable et calculer sa somme* $S = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \dfrac{1}{p!q!(p+q+1)}$.

   On partitionnera l'ensemble $I = \mathbb{N}^2$ en diagonale (faire un schéma).
4. *Montrer que la famille (suite double)* $\left(\dfrac{(-1)^{p+q}}{2^p3^q(p+q+1)}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ *est sommable et calculer la valeur de sa somme* $S = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \dfrac{(-1)^{p+q}}{2^p3^q(p+q+1)}$.

   On admet que pour tout $x \in]-1;1[$, $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$.
5. (a) *Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$. Montrer que la famille (suite double découplée) $(z^{2p+3q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme* $S(z) = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} z^{2p+3q}$.

   (b) *Montrer que* $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n z^n$ *où d_n est le nbre de façons d'écrire $n = 2p+3q$ avec $(p,q)\in\mathbb{N}^2$.*

Exercice 4. *Soient $r \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$.*
Montrer que la famille $(r^{|n|}e^{in\theta})_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et déterminer sa somme $S = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{in\theta}$ (on pourra utiliser la partition $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{Z}_-^*$).

Exercice 5. *Les familles suivantes sont-elles sommables ?*

(a) $\left(\frac{1}{x}\right)_{x\in\mathbb{Q}\cap]0;1]}$ (b) $\left(\frac{1}{x^2}\right)_{x\in\mathbb{Q}\cap]0;1]}$ (c) $\left(\frac{1}{x^3}\right)_{x\in\mathbb{Q}\cap]0;1]}$ (c) $\left(\frac{1}{x^2}\right)_{x\in\mathbb{Q}\cap[1;+\infty[}$

Exercice 6. *Réf. 66*

1. *On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer la convergence et calculer la somme de la série de terme général $u_n = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p^2(n-p)^2}$.*
2. *Montrer la convergence et calculer $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)3^{-n}$.*

Grand merci à Gilles François dont j'ai repris ici le cours.