Chapitre 32 : variables aléatoires discrètes

Le formalisme des variables aléatoires trouve sa justification dans le fait que l'on peut faire sur les réels des opérations algébriques telles que additions, multiplications ou image par une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors que penser de telles manipulations directement sur les événements liés à l'expérience aléatoire est difficile voire impossible.

1 Généralités sur les variables aléatoires

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

Définition 1.

*Une **variable aléatoire réelle** (var) X est une fonction $X : \Omega \to \mathbb{R},\ \omega \mapsto X(\omega)$.*
*Une **variable aléatoire complexe** (vac) X est une fonction $X : \Omega \to \mathbb{C},\ \omega \mapsto X(\omega)$.*
*L'**univers image** de X, noté $X(\Omega)$, est l'image directe de Ω par X : $X(\Omega) = \{X(\omega) \text{tel que } \omega \in \Omega\}$.*

On dit que le réel $X(\omega)$ est variable car il est susceptible de prendre en général des valeurs différentes selon les issues ω et aléatoire car la venue d'une issue ω dépend du hasard.

Propriété 1 (Evenements liés à une variable aléatoire).

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle. Quelque soit l'intervalle I de $\mathbb{R}$, l'image réciproque de I par l'application X, $X^{-1}(I) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\}$, est un événement. On le note $\{x \in I\}$ ou $(x \in I)$.

NOTATIONS
Soit X une variable aléatoire définie sur Ω.
L'événement $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$ est noté $\{X = x\}$.
L'événement $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}$ est noté $\{X \leq x\}$.
L'événement $\{\omega \in \Omega \mid a \leq X(\omega) < b\}$ est noté $\{a \leq X < b\}$.

Définition 2 (vard).

Soit X une var. On dit que X est une variable aléatoire réelle discrète (vard) lorsque $X(\Omega)$ est fini ou peut s'écrire $X(\Omega) = \{\omega_n \mid n \in I\}$, où I est une partie de $\mathbb{N}$.

En utilisant les opérations algébriques usuelles, on peut obtenir de nouvelles var discrètes.

Propriété 2 (Opérations sur les var discrètes).

Soit (Ω, P) un espace probabilisé, λ un réel et X et Y deux vard sur Ω.
On définit les applications suivantes sur Ω :
$X + Y$ est telle que $\forall \omega \in \Omega,\ (X+Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$.
$X \times Y$ est telle que $\forall \omega \in \Omega,\ (X \times Y)(\omega) = X(\omega) \times Y(\omega)$.
$\lambda.X$ est telle que $\forall \omega \in \Omega,\ (\lambda.X)(\omega) = \lambda \times X(\omega)$. $X+Y$, $X \times Y$ et $\lambda.X$ sont des vard sur Ω.

1.1 Loi d'une vard

Si X est une var sur (Ω, P) alors la fonction $\mathcal{P}(\Omega) \to [0,1],\ A \mapsto P(X \in A)$ est une probabilité sur $X(\Omega)$ appelée loi de X et notée P_X.

► Exemple Une pièce amène pile avec la probabilité p et face avec la probabilité $q = 1 - p$, où $0 < p < 1$. On la lance n fois de suite. Soit X le nombre de fois où pile apparaît au cours de ces lancers. Quelle est la loi de X ?
► Exemple On lance deux dés non pipés. Soit X la somme des numéros obtenus. Préciser l'univers Ω, $X(\Omega)$ et la loi de X.
► Exemple Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient a boules blanches et b boules noires, avec $a \geq n$ et $b \geq n$. On tire simultanément n boules de l'urne et on note X la var égale au nombre de boules blanches tirées. Quelle est la loi de X ?

Propriété 3 (Système complet d'événements associé à une vard).

Soit X une vard. La famille $((X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements.

Par conséquent, si X est une vard, alors $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1$.
De plus, pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{R}$, $P(X \in A) = \displaystyle\sum_{x \in A \cap X(\Omega)} P(X = x)$.

Définition 3 (vard de même loi).

On dit que les deux vard X et Y, toutes deux définies sur le même espace probabilisé (Ω, P), ont même loi lorsque

$$\forall x \in X(\Omega),\ P(X = x) = P(Y = x).$$

On note alors $X \sim Y$.

Attention, deux vard ayant même loi ne sont pas forcément égales. Par exemple, si $\Omega = \{1, 2\}$ et si P est la probabilité uniforme sur Ω, que penser de $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $X(1) = 0$ et $X(2) = 8$ et de $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $Y(1) = 8$ et $Y(2) = 0$?

1.2 Caractérisation d'une loi d'une vard

Propriété 4 (Cas où $X(\Omega)$ est fini).

Soit $E = \{x_1,\ x_2,\ \cdots x_n\}$ un ensemble de n réels et $p_1, p_2, \cdots, p_n$ n réels tels que

$$\forall k \in [[1, n]],\ p_k \geq 0 \text{ et } \sum_{k=1}^{n} p_k = 1.$$

Alors il existe un espace probabilisé (Ω, P) et une vard X définie sur cet espace tels que $X(\Omega) = E$ et pour tout $k \in [[1, n]],\ P(X = x_k) = p_k$.

On retient que si l'on doit montrer qu'un n-uplet constitue la loi d'une var dans ce contexte, il faudra simplement vérifier que $\forall k \in [[1, n]],\ p_k \geq 0$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.

2 Image d'une vard par une fonction

Nous serons souvent amenés, à partir d'une var discrète X donnée, définie sur un espace probabilisé (Ω, P) et d'une fonction $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $X(\Omega) \subset D$, à considérer des expressions du type $f \circ X$.
C'est le cas par exemple si l'on considère un mobile qui se déplace de façon aléatoire sur un axe à chaque instant entier $t = n$. Si on désigne par X_n son abscisse, supposée entière, au temps $t = n$, $|X_n|$ désigne la distance ce ce mobile à l'origine au même instant.

Définition 4 (Image d'une variable aléatoire par une fonction).

Pour toute variable discrète X, et pour toute application f de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$, l'application composée $f \circ X$: $\omega \mapsto f(X(\Omega))$ est une variable aléatoire discrète. La variable aléatoire $f \circ X$ est notée $f(X)$.

Propriété 5 (Loi associée à l'image d'une variable aléatoire par une fonction).

On suppose que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$.
Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction telle que* $X(\Omega) \subset D$.
Alors $\forall u_j \in (f \circ X)(\Omega),\ P(f \circ X = u_j) = \sum_{f(x_k)=u_j} P(X = x_k)$.
Dans la formule précédente les x_k *sont les antécédents de* u_j.

▶ Exemple On considère une var X dont la loi est définie par :
$X(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$,
$P(X = -2) = 0.15$, $P(X = -1) = 0.23$, $P(X = 0) = 0.35$, $P(X = 1) = 0.09$ et $P(X = 2) = 0.18$.
Soit f la fonction carrée définie sur $\mathbb{R}$. Donner la loi de la var $Y = f(X)$.

Remarque 1. *Si* $X \sim Y$ *avec* X *et* Y *deux var sur* (Ω, P) *et* f *est définie sur* $X(\Omega)$ *alors* $f(X) \sim f(Y)$.

3 Lois usuelles

La reconnaissance de situations modélisées par les lois qui suivent est une capacité attendue. Vous devez réfléchir aux situations types où interviennent les lois classiques et faire l'effort de vous y ramener, lorsque l'expérience aléatoire s'y prête. Il faut absolument vous entrainer à ce travail de mise en équivalence des situations aléatoires pour réussir les problèmes à l'écrit.

3.1 Loi d'une variable quasi-certaine

On dit que X est une var quasi-certaine égale à a lorsque $P(X = a) = 1$.

3.2 Loi uniforme

Situation type : une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On en prend une au hasard et on note X le numéro tiré. $X(\Omega) = [[1, n]]$ et $\forall k \in [[1, n]],\ P(X = k) = \frac{1}{n}$. X prend donc toutes les valeurs de $X(\Omega)$ avec la même probabilité.

Définition 5.

On dit que $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *suit une loi uniforme sur* $[[1, n]]$ *si*

$$\forall k \in [[1, n]],\ P(X = k) = \frac{1}{n}.$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{U}([[1, n]])$.

▶ Exemple n candidats se présentent dans un ordre aléatoire devant un jury. On suppose que ces candidats peuvent être classés par valeur, sans ex-aequo. On note X la var égale au rang de présentation du meilleur d'entre eux.

3.3 Loi de Bernouilli de paramètre $p \in [0, 1]$

Situation type : définir une var de Bernouilli consiste à coder par 1 et 0 la réalisation ou la non réalisation d'un événement. Ainsi, lors d'une série de lancers à pile ou face, désignons pas X la var qui vaut 1 si pile apparaît au premier lancer et 0 sinon. $X(\omega) = 1$ si ω est une issue qui amène pile au premier lancer et $X(\omega) = 0$ sinon.

Définition 6.

On dit que $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *suit une loi de Bernouilli de paramètre* p, $0 < p < 1$ *si* $X(\Omega) = \{0, 1\}$ *et* $P(X = 1) = p$.
On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

▶ Exemple Un mobile se déplace sur un axe gradué. A $t = 0$, il est en O et se déplace à chaque instant entier $t = n$ de +1 ou de -1 avec équiprobabilité. Soit X_n la var de Bernouilli égale à 1 si le mobile est en O à $t = 2n$, $n \geq 1$, et à 0 sinon. Déterminer le paramètre de cette var.

3.4 Loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$

Situation type : uen urne contient des boules blanches en proportion p, $0 < p < 1$ et des boules noires en proportion $q = 1 - p$. On effectue n tirages successifs en remettant à chaque fois la bouel tirée. On s'intéresse à X, la var égale au nombre de boules blanches tirées.

Définition 7.

> *On dit que $X : \Omega \to \mathbb{R}$ suit une loi binomiale de paramètres (n,p) si $X(\Omega) = [[0,n]]$ et $\forall k \in [[0,n]]$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.*
> *On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.*

► Exemple Un mobile se déplace sur un axe gradué. A $t = 0$, il est en O et se déplace à chaque instant entier $t = n$ de +1 ou de -1 avec équiprobabilité. Soit X la var égale au nombre de fois où son abscisse a varié de +1 entre les instants 0 et $n - 1$. Montrer que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$.

4 Moments d'une variable aléatoire réelle discrète

La notion de moment fut introduite par Markov (1856-1922). Ces moments constituent des indices qui résument la loi d'une var et fournissnet des éléments d'analyse au sujet de cette loi.

4.1 Espérance

Définition 8.

> *Soit X une var définie sur un univers probabilisé (Ω, P). On suppose que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. On appelle* ***espérance de*** *X le réel $E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k P(X = x_k)$.*

$E(X)$ est la moyenne des valeurs x_k prises par la var X pondérée par les probabilités $P(x = x_k)$ avec lesquelles X prend ces valeurs. On doit donc se souvenir que si $a \leq X \leq b$ alors $a \leq E(X) \leq b$.
Le terme espérance a été introduit aux dix-septième et dix-huitième siècles dans un contexte de jeu de hasard : elle devait représenter le gain qu'un joueur était en droit d'attendre lorsqu'il engageait différents paris (Pascal, le Chevalier de Méré, De Moivre et Poisson).
► Exemple Soit C_k la var de loi définie par :
$P(C_k = j) = \frac{1}{k}$ si $1 \leq j \leq k - 2$ et
$P(C_k = k - 1) = \frac{2}{k}$.
Quelle est l'espérance de C_k ?
► Exemple Calculer $E(X)$ lorsque X est une var discrète

1. constante,
2. égale à l'indicatrice d'une partie Ω,
3. qui suit une loi uniforme sur $[[1,n]]$,
4. qui suit une loi de Bernouilli de paramètre p,
5. qui suit une loi $\mathcal{B}(n,p)$.

Théorème 1 (Théorème du transfert).

> *Soit X une var définie sur un univers probabilisé (Ω, P). On suppose que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$.*
> *Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $X(\Omega) \subset D$.*
> *On a vu que $Y = f(X)$ est une var discrète définie sur (Ω, P).*
> *On a $E(Y) = E(f(X)) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) P(X = x_k)$.*

Le théorème de transfert permet de déterminer l'espérance de variables aléatoires sans avoir nécessairement à en préciser la loi.

▶ Exemple On considère une var X dont la loi est définie par :
$X(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$,
$P(X = -2) = 0.15$, $P(X = -1) = 0.23$, $P(X = 0) = 0.35$, $P(X = 1) = 0.09$ et $P(X = 2) = 0.18$.
Soit f la fonction carrée définie sur $\mathbb{R}$. Donner l'espérance de la var $Y = f(X)$ de deux manières.

Propriété 6.

- ***Linéarité***. *Soient X et Y deux vard, définies sur le même espace probabilisé et soient λ et μ deux réels. La vard $\lambda X + \mu Y$ admet pour espérance*

$$E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y).$$

  Cas particulier Y constante égale à a : $E(\lambda X + a) = \lambda E(X) + a$.
- ***Positivité***. *Si $X \geq 0$, alors $E(X) \geq 0$.*
- ***Croissance***. *Soient X et Y deux vard, définies sur le même espace probabilisé. On suppose que $X \leq Y$. Alors $E(X) \leq E(Y)$.*

▶ Exemple Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. On pose $Y = X^2$. Déterminer $E(Y)$.

Définition 9 (var centrée).

Soit X une var définie sur un univers probabilisé (Ω, P).
*X est dite **centrée** si $E(X) = 0$.*

▶ Exemple Soit X une var définie sur un univers probabilisé (Ω, P). On pose $Y = X - E(X)$. Espérance de Y ?

4.2 Variance

Définition 10.

*Soit X une var définie sur un univers probabilisé (Ω, P). On suppose que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. On appelle **variance de** X le réel $V(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - E(X))^2 P(X = x_k)$.*

▶ Exemple Calculer la variance et l'écart-type d'une var discrète X qui suit une loi de Bernouilli de paramètre p.
▶ Exemple Calculer la variance et l'écart-type d'une var discrète X qui suit une loi binomiale de paramètres (n, p).

Propriété 7 (Formule de Koënig-Huyghens).

Soit X une var définie sur un univers probabilisé (Ω, P). On suppose que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$.
$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

▶ Exemple Retrouver $E(X^2)$ dans le cas où X est une var discrète qui suit une loi binomiale de paramètres (n, p).

Propriété 8 (Positivité de la variance).

Soit X une vard. $V(X) \geq 0$.

$V(X) = 0$ ssi $P(X = E(X)) = 1$, cad ssi $X = E(X)$ presque sûrement.

Définition 11 (Ecart-type).

Soit X une vard. On définit l'écart-type de X, que l'on note $\sigma(X)$, par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Propriété 9 (Variance de $aX + b$).

Soit X une vard. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $aX + b$ possède une variance et $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

Définition 12.

Soit X une var définie sur un univers probabilisé (Ω, P). On suppose que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$.
*X est dite **réduite** si $V(X) = 1$.*
*On appelle **var centrée réduite associée à** X la var X^* définie par $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$.*

► Exemple Montrer que dans le contexte de la définition précédente, $E(X^*) = 0$ et $V(X^*) = 1$.
► Exemple Quelle est la var centrée réduite associée à une var X qui suit une loi binomiale de paramètre (n, p) ?

5 Deux inégalités probabilistes

Propriété 10 (Inégalité de Markov).

Soit X une vard, à valeurs positives. Alors pour tout réel $\lambda > 0$,

$$P(X \geq \lambda) \leq \frac{E(X)}{\lambda}.$$

► Exemple Une montre prend de l'avance chaque jour avec une moyenne de 2 secondes par jour. Calculer un majorant de la probabilité qu'elle prenne plus de 10 secondes d'avance en un jour.

Propriété 11 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev).

Soit X une vard. Pour tout réel $\epsilon > 0$,

$$(P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(X)}{\epsilon^2}.$$

► Exemple On effectue n lancers ($n \geq 1$) d'un même dé cubique parfaitement équilibré. On note F la variable aléatoire égale à la fréquence d'apparition du numéro 5 au cours des n lancers. Calculer l'espérance et la variance de F. Déterminer une valeur suffisante du nombre n de lancers permettant d'affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5% que la fréquence d'apparition du numéro 5 diffère de 1/6 d'au plus 1/100.