MPSI 14/06/24 DS11 COR

Exercice 1

$$\varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_1[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[X] \\ P & \longmapsto & (X-a)(X-b)P' - (X - \frac{a+b}{2})P \end{array}$$

1 Commençons par démontrer que φ_1 est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_1[X]$. Considérons pour cela un polynôme $P = \alpha + \beta X \in \mathbb{R}_1[X]$. On peut écrire :

$$\begin{aligned} \varphi_1(P) &= (X-a)(X-b)\beta - \left(X - \frac{a+b}{2}\right)(\alpha + \beta X) \\ &= \beta X^2 - (a+b)\beta X + ab\beta - \beta X^2 - \left(\alpha - \frac{a+b}{2}\beta\right) X + \frac{a+b}{2}\alpha \\ &= -(a+b)\beta X + ab\beta - \left(\alpha - \frac{a+b}{2}\beta\right) X + \frac{a+b}{2}\alpha \end{aligned}$$

On constate donc que $\varphi_1(P) \in \mathbb{R}_1[X]$. Par ailleurs, si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P,Q) \in (\mathbb{R}_1[X])^2$, alors :

$$\begin{aligned} \varphi_1(\lambda P + \mu Q) &= (X-a)(X-b)(\lambda P + \mu Q)' - (X - \frac{a+b}{2})(\lambda P + \mu Q) \\ &= (X-a)(X-b)\left(\lambda P' + \mu Q'\right) - (X - \frac{a+b}{2})(\lambda P + \mu Q) \\ &= \lambda\left[(X-a)(X-b)P' - (X - \frac{a+b}{2})P\right] + \mu\left(X-a)(X-b)Q' - (X - \frac{a+b}{2})Q\right] \\ &= \lambda\varphi_1(P) + \mu\varphi_1(Q) \end{aligned}$$

L'application φ_1 est donc linéaire et on peut conclure :

$$\boxed{\varphi_1 \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_1[X].}$$

2 On trouve :

$$\varphi_1(1) = \frac{a+b}{2} - X \qquad \varphi_1(X) = ab - \frac{a+b}{2}X$$

On déduit donc immédiatemment :

$$\boxed{M_1 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\varphi_1) = \begin{bmatrix} \frac{a+b}{2} & ab \\ -1 & -\frac{a+b}{2} \end{bmatrix}}$$

3 L'application φ_1 sera bijective si et seulement si la matrice M_1 est inversible, ce qui est encore équivalent à $\det(M_1) \neq 0$. Or :

$$\det(M_1) = \begin{vmatrix} \frac{a+b}{2} & ab \\ -1 & -\frac{a+b}{2} \end{vmatrix} = -\frac{a^2+2ab+b^2}{4} + ab = -\frac{(a-b)^2}{4}$$

En conclusion :

$$\boxed{\varphi_1 \text{ est bijective si et seulement si } a \neq b}$$

4.a Montrons que la famille $\{X-a, X-b\}$ est une famille libre. Considérons pour cela $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha(X-a) + \beta(X-b) = 0$. On déduit $(\alpha+\beta)X - (a\alpha + b\beta) = 0$, ce qui implique :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ a\alpha + b\beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = -\alpha \\ a\alpha - b\alpha = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \text{ car } a \neq b$$

La famille $\{X-a, X-b\}$ est donc libre. En tant que famille libre constituée de deux éléments dans $\mathbb{R}_1[X]$ qui est de dimension 2, on déduit :

$$\boxed{\text{La famille } \{X-a, X-b\} \text{ est une base de } \mathbb{R}_1[X].}$$

4.b On trouve :

$$\varphi_1(X-a) = (X-a)(X-b) - (X - \frac{a+b}{2})(X-a) = \frac{a-b}{2}(X-a)$$

$$\varphi_1(X-b) = (X-a)(X-b) - (X - \frac{a+b}{2})(X-b) = \frac{b-a}{2}(X-b)$$

ce qui permet d'écrire :

$$\boxed{M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_1) = \begin{bmatrix} \frac{a-b}{2} & 0 \\ 0 & \frac{b-a}{2} \end{bmatrix}}$$

2/7

4.c Des égalités

$$1=\frac{1}{b-a}(X-a)-\frac{1}{b-a}(X-b) \qquad\qquad X=\frac{b}{b-a}(X-a)-\frac{a}{b-a}(X-b)$$

On déduit facilement :

$$\boxed{P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{b-a} & \frac{b}{b-a}\\ \frac{-1}{b-a} & \frac{-a}{b-a}\end{bmatrix}} \qquad \boxed{P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}-a & -b\\ 1 & 1\end{bmatrix}}$$

4.d L'égalité attendue est :

$$\boxed{M_1=P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}}\times M\times P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}}$$

4.e La matrice M étant diagonale, on trouve facilement :

$$\boxed{\forall p\in\mathbb{N}\,,\ M^p=\frac{(a-b)^p}{2^p}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & (-1)^p\end{bmatrix}}$$

Or, d'après la question 4.(d), on peut écrire :

$$M_1^p=\Big(P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}}\times M\times P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}\Big)^p=P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}}\times M^p\times P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}$$

On obtient donc, après calculs :

$$\boxed{M_1^0=I_2} \qquad \boxed{\forall p\in\mathbb{N}^*\,,\ M_1^p=\begin{bmatrix}\dfrac{(a-b)^{p-1}\,(a-(-1)^pb)}{2^p} & \dfrac{(a-b)^{p-1}\,(ab-ab(-1)^p)}{2^p}\\[2ex] \dfrac{(a-b)^{p-1}\,(-1+(-1)^p)}{2^p} & \dfrac{(a-b)^{p-1}\,(-b+a(-1)^p)}{2^p}\end{bmatrix}}$$

5.a On constate que Γ est l'ensemble des combinaisons linéaires des quatre matrices I_2, M_1, M_1^2 et M_1^3. Autrement dit, on a :

$$\Gamma=\mathrm{Vect}\Big(I_2,M_1,M_1^2,M_1^3\Big)$$

Il est alors clair que Γ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5.b On trouve, soit directement, soit d'après la question 4.(e) :

$$M_1^2=\begin{bmatrix}\frac{(a-b)^2}{4} & 0\\ 0 & \frac{(a-b)^2}{4}\end{bmatrix} \qquad M_1^3=\begin{bmatrix}\frac{(a-b)^2(a+b)}{8} & \frac{ab(a-b)^2}{4}\\ -\frac{(a-b)^2}{4} & -\frac{(a+b)(a-b)^2}{8}\end{bmatrix}$$

ce qui peut encore s'écrire : $\boxed{M_1^2=\frac{(a-b)^2}{4}I_2}$ et $\boxed{M_1^3=\frac{(a-b)^2}{4}M_1}$

5.c D'après la question 5.(a), on peut écrire $\Gamma=\mathrm{Vect}\Big(I_2,M_1,M_1^2,M_1^3\Big)$. Or, la matrice M_1^2 est un multiple de I_2 et la matrice M_1^3 est un multiple de M_1. On déduit donc $\Gamma=\mathrm{Vect}\Big(I_2,M_1\Big)$. La famille $\{I_2,M_1\}$ est donc une famille génératrice de Γ. Or, cette famille n'est pas liée car la matrice M_1 n'est pas un multiple de I_2. Cette famille est donc libre et on peut conclure que c'est une base de Γ :

$$\boxed{\text{La famille } \{I_2,M_1\} \text{ est une base de } \Gamma.}$$

6 Puisque $\frac{(a-b)^2}{4}=1$, on peut dire d'après la question 5.(b) que $M_1^2=I_2$. On peut donc en déduire que $\varphi_1\circ\varphi_1=\mathrm{id}_E$, donc :

$$\boxed{\text{L'application } \varphi_1 \text{ est une symétrie.}}$$

Soit $P=\alpha+\beta X\in\mathbb{R}_1[X]$. On trouve :

$$\varphi_1(P)=P \iff M_1\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} \iff \begin{cases}3\alpha+8\beta=\alpha\\ -\alpha-3\beta=\beta\end{cases} \iff \alpha=-4\beta$$

$$\varphi_1(P)=-P \iff M_1\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\alpha\\ -\beta\end{bmatrix} \iff \begin{cases}3\alpha+8\beta=-\alpha\\ -\alpha-3\beta=-\beta\end{cases} \iff \alpha=-2\beta$$

Ainsi, l'ensemble des éléments invariants par φ_1 est $\{-4\beta+\beta X\,,\ \beta\in\mathbb{R}\}$, c'est à dire $\mathrm{Vect}\big(X-4\big)$. Par ailleurs, l'ensemble des éléments changés en leur opposé par φ_1 est $\{-2\beta+\beta X\,,\ \beta\in\mathbb{R}\}$, c'est à dire $\mathrm{Vect}\big(X-2\big)$. En conclusion :

$$\boxed{\varphi_1 \text{ est la symétrie par rapport à } \mathrm{Vect}\big(X-4\big) \text{ suivant la direction } \mathrm{Vect}\big(X-2\big).}$$

II Exercice 2

(1)(a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right| = \frac{1}{k}$ et $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}$ DV (série harmonique)

donc $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ ne converge pas absolument.

(1)(b) Posons $u_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^k u_k = \frac{(-1)^k \times (-1)^{k+1}}{k} = -\frac{1}{k} < 0$

donc $\sum_{k\geq 1} u_k$ est une série alternée.

$(|u_k|)_{k\geq 1}$ est strictement décroissante car $|u_k| = \frac{1}{k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

et $\lim_{k\to+\infty} |u_k| = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k} = 0$.

Donc $\sum_{k\geq 1} u_k$ converge par le critère spécial des séries alternées.

(1)(c) Soit $n \geq 1$

$$T_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{2i+1}}{2i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{2i-1+1}}{2i-1}$$

car $k \in [\![1, 2n]\!]$ est pair ssi il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tq $k = 2i$

et $k \in [\![1, 2n]\!]$ est impair ssi il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tq $k = 2i-1$.

Ainsi $T_{2n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{-1}{2i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i-1}$ $\quad -1 = 1-2$

$T_{2n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1-2}{2i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i-1}$ $\quad$ linéarité de la somme

$T_{2n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i} - 2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i-1}$

$T_{2n} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i-1}\right) - \frac{2}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$

$T_{2n} = \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{1}{k} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{1}{k}\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \boxed{H_{2n} - H_n}$

(1)(d) Puisque $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ CV, la suite des sommes partielles associée aussi

donc (T_n) converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = l$ donc (T_n) converge vers l

Ainsi (T_{2n}), qui est une sous-suite de (T_n), converge vers l aussi.

or $\forall n \geq 1$ $T_{2n} = H_{2n} - H_n$ et $\quad H_n = \ln n + \gamma + o(1)$ avec $\gamma \in \mathbb{R}$

donc $T_{2n} = \ln(2n) + \gamma + o(1) - (\ln(n) + \gamma + o(1)) = \ln \frac{2n}{n} + o(1)$

$= \ln 2 + o(1)$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} T_{2n} = \ln 2$ donc $\boxed{l = \ln 2}$

II suite

2) Exercice 2 $u_n = \dfrac{1}{\binom{n+p}{n}}$

NB Bien comprendre : on fixe p
on fait varier n.
p est considéré comme paramètre de la suite (u_n)

a) si $p=0$ $\quad u_n = \dfrac{1}{\binom{n}{n}} = 1 \xrightarrow[+\infty]{} 1 \quad \sum_{n\geq 1} u_n$ DVG

si $p=1$ $\quad u_n = \dfrac{1}{\binom{n+1}{n}} = \dfrac{1}{\binom{n+1}{1}} = \dfrac{1}{n+1}$ Mq $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+1}$ DV

$\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$ et $\forall n\geq 1$, $\frac{1}{n}>0$ et $\frac{1}{n+1}>0$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ DV (série harmonique)
donc par le théorème d'équivalence positive, $\sum \frac{1}{n+1}$ DV

b) i) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p\geq 2$

$(n+p+2)\,u_{n+2} = (n+p+2)\dfrac{1}{\binom{n+2+p}{n+2}} = \dfrac{(n+p+2)\,p!\,(n+2)!}{(n+2+p)!} = \dfrac{p!\,(n+2)!}{(n+p+1)!}$

$= (n+2)\dfrac{p!\,(n+1)!}{(n+p+1)!} = (n+2)\times \dfrac{1}{\binom{n+1+p}{n+1}} = (n+2)\,u_{n+1}$

on a bien $\boxed{(n+p+2)\,u_{n+2} = (n+2)\,u_{n+1} \quad \text{pour } n\in\mathbb{N},\ p\geq 2}$

ii) Soit $p\geq 2$ fixé. Montrons que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$: " $S_n = \frac{1}{p-1}\left(1-(n+p+1)u_{n+1}\right)$ "

* au rang $n=1$ $\quad S_1 = u_1 = \dfrac{1}{\binom{p+1}{1}} = \dfrac{1}{p+1}$

$\frac{1}{p-1}\left(1-(p+2)u_2\right) = \frac{1}{p-1}\left(1-\frac{2}{p+1}\right) = \frac{1}{p-1}\,\frac{p-1}{p+1} = \frac{1}{p-1} = S_1$

car $u_2 = \dfrac{1}{\binom{p+2}{p}} = \dfrac{1}{\binom{p+2}{2}} = \dfrac{1}{\frac{(p+2)(p+1)}{2}} = \dfrac{2}{(p+2)(p+1)}$ ou d'après 2b i) : $(p+2)u_2 = 2u_1$

donc $\mathcal{P}_1$ vraie

* Supposons qu'à 1 rang n de $\mathbb{N}^*$ fixé on ait $S_n = \dfrac{1-(n+p+1)u_{n+1}}{p-1}$

on a alors $S_{n+1} = S_n + u_{n+1} = \dfrac{1}{p-1} + u_{n+1}\left[-\dfrac{(n+p+1)}{p-1}+1\right]$

$= \frac{1}{p-1} + \frac{u_{n+1}}{p-1}(-n-p-1+p-1) = \frac{1}{p-1}\left[1+u_{n+1}(-n-2)\right] = \frac{1}{p-1}\left[1-u_{n+2}(n+p+2)\right]$

car $u_{n+1}(n+2) = (n+p+2)u_{n+2}$ d'après question 2b i)

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ vraie

* Conclusion :

$$\boxed{\forall n\geq 1, \qquad S_n = \frac{1}{p-1} - \frac{n+p+1}{p-1}\,u_{n+1}}$$

c) i) Soit $n\geq 1$ et $p\geq 2$

$v_{n+1}-v_n = (n+p+1)\,u_{n+1} - (n+p)\,u_n$

$= (n+1)\,u_n - (n+p)\,u_n = (1-p)\,u_n$

question 2b i) $n \leftarrow n+1$

$u_n\geq 0$ car $\binom{n+p}{n}\geq 0$

$1-p\leq 0$ car $p\geq 2$

$\forall n$ $v_{n+1}-v_n \leq 0$ dc $\boxed{(v_n)_{n\geq 1} \text{ suite décroissante}}$

ii) Soit p fixé, $p\geq 2$ et $n\in\mathbb{N}^*$

$v_n = n\,u_n = \dfrac{n}{\binom{n+p}{n}} \geq 0$

$(v_n)_{n\geq 1}$ est donc décroissante et minorée par 0 donc $\boxed{(v_n)_{n\geq 1} \text{ converge.}}$

On note $\ell = \lim_{+\infty} v_n$, $\forall n$ $v_n\geq 0 \Rightarrow \boxed{\ell\geq 0}$.

iii) $\forall p$ $\forall n\geq 1$

$S_n = \dfrac{1}{p-1} - \dfrac{(n+p+1)\,u_{n+1}}{p-1} = \dfrac{1}{p-1} - \dfrac{v_{n+1}}{p-1}$

(S_n) CV comme somme de suites CV $\quad S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1-\ell}{p-1}$

donc $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geq 1} u_n \text{ CV et } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1-\ell}{p-1} \quad (p \text{ fixé})}$

où $\ell = \lim_{n\to+\infty}(n+p)u_n$

d) Supposons $\ell\neq 0$

i) on a $(n+p)u_n = v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell\neq 0$

donc $v_n \underset{+\infty}{\sim} \ell$ ie $(n+p)u_n \underset{+\infty}{\sim} \ell$ or p fixé

$n+p \underset{+\infty}{\sim} n$

c'est n au $\mathcal{V}(+\infty)$

donc on a $n\,u_n \underset{+\infty}{\sim} \ell$

et donc $\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ell}{n}}$

ii) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ DV donc $\sum_{n\geq 1}\ell\,\frac{1}{n}$ DV donc par le thé d'éq positive, $\sum_{n\geq 1} u_n$ DV. Absurde ! cf 2) c) iii)

e) Donc $\boxed{\ell=0}$

et donc $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{p-1}}$

d'après 2) c iii) avec $\ell=0$

III EV3 : dénombrement

①ⓐ Un résultat est une permutation de l'ensemble des 35 élèves. Il y a donc $35!$ résultats

①ⓑ Un résultat peut être considéré comme une 9 listes de l'ensemble des 35 élèves. Il y a donc 35^9 résultats.

①ⓒ Un résultat peut être considéré comme un 8 arrangement de l'ensemble des 35 élèves. Il y a donc $\frac{35!}{27!} = 35 \times 34 \times 33 \times 32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28$ résultats

①ⓓ Un résultat peut être considéré comme une 8-combinaison de l'ensemble des 35 élèves. Il y a donc $\binom{35}{8}$ résultats.

①ⓔ On raisonne par choix successifs.
Pour construire un résultat on procède de la manière suivante :

- on choisit parmi les 8 places 4 places que l'on réserve par exemple aux filles. les autres seront donc réservées aux garçons : $\binom{8}{4}$ possibilités
- puis on choisit 4 filles de la classe parmi les 16 filles de la classe : $\binom{16}{4}$ possibilités
- puis on répartit les 4 filles choisies dans les 4 places réservées aux filles $\rightarrow$ 4! possibilités
- ensuite on choisit 4 garçons parmi les 19 garçons de la classe : $\binom{19}{4}$ possibilités
- enfin on répartit les 4 garçons choisis dans les 4 places réservées aux garçons $\rightarrow$ 4! possibilités

Il y a donc $\binom{8}{4} \times \binom{16}{4} \times 4! \times \binom{19}{4} \times 4!$ possibilités

②ⓐ Une main peut être considérée comme une 5 combinaison de l'ensemble des 52 cartes. Il y a donc $\binom{52}{5}$ mains au total

②ⓑ • Pour construire une main qui appartient à A on procède comme suit :

- on choisit 2 rois parmi les quatre rois : $\binom{4}{2}$ possibilités
- puis on choisit les 3 cartes restantes dans l'ensemble des 48 cartes "non roi" $(52-4)$: $\binom{48}{3}$ possibilités

on a donc $\mathrm{Card}(A) = \binom{4}{2} \times \binom{48}{3} = 48 \times 47 \times 46$

• Pour construire une main qui appartient à B on procède comme suit :

- on choisit 3 coeurs parmi les 13 coeurs présents dans le jeu : $\binom{13}{3}$ possibilités
- puis on choisit les 2 cartes restantes dans l'ensemble des 39 cartes "non coeur" $(52-13)$: on a donc $\binom{39}{2}$ possibilités

on a donc $\mathrm{Card}(B) = \binom{13}{3} \times \binom{39}{2} = 13 \times 11 \times 39 \times 38$

• Pour construire une main qui appartient à $A \cap B$, on raisonne par disjonction de cas : soit le roi de ♡ appartient à la main, soit le roi de ♡ n'est pas un élément de la main.

- si la main contient le roi de ♡ alors voici comment on la construit :
  - on choisit le roi de ♡ : 1 possibilité
  - on choisit un autre roi parmi les 3 rois restants : $\binom{3}{1}$ possibilités
  - on choisit deux ♡ parmi les cartes ♡ restantes (il en reste 12) : $\binom{12}{2}$ possibilités
  - on choisit une carte parmi les cartes à la fois non roi et non cœur $(52-4-12=36)$: $\binom{36}{1}$ possibilités
- si la main ne contient pas le roi de ♡ alors :
  - on choisit 2 rois parmi les rois non ♡ : $\binom{3}{2}$ possibilités
  - on choisit 3 cœurs parmi les 13 cartes ♡ : $\binom{13}{3}$ possibilités

Finalement il y a : $1\times\binom{3}{1}\times\binom{12}{2}\times\binom{36}{1}+\binom{3}{2}\times\binom{13}{3}$ possibilités

soit $3\times 66\times 36+3\times 11\times 13\times 2 = 66(72+13) = 66\times 85$

soit 5610 résultats $\Rightarrow$ $\underline{\text{Card}(A\cap B)=5610}$

- $\text{Card}(A\cup B) = \text{Card}(A)+\text{Card}(B)-\text{Card}(A\cap B) =$
  $= \underline{\binom{4}{2}\binom{48}{3}+\binom{13}{3}\times\binom{39}{2}-5610}$

② ⓒ Pour construire un résultat :

- on choisit 3 hauteurs parmi les 13 hauteurs possibles : 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-V-D-R.
  $\rightarrow \binom{13}{3}$ possibilités
- on choisit quelle hauteur va être répétée 3 fois parmi les 3 hauteurs choisies $\Rightarrow \binom{3}{1}$ possibilités
- on choisit quelles couleurs seront présentes dans la main càd on choisit 3 couleurs parmi les 4 (♡, ◇, ♧, ♤) : $\binom{4}{3}$ possibilités
- on choisit la couleur de la 2ème hauteur : $\binom{4}{1}$ possibilités
- on choisit la couleur de la 3e hauteur : $\binom{4}{1}$ possibilités

Finalement il y a

$\binom{13}{3}\times\binom{3}{1}\times\binom{4}{3}\times\binom{4}{1}\times\binom{4}{1} = \frac{13\times 12\times 11}{6}\times 3\times 4\times 4\times 4 = \underline{13\times 12\times 11\times 32}$

mains contenant un brelan.

3 a un code peut être considéré comme une 5 liste de $[\![0,9]\!]$
il y a donc $10^5 = \underline{100\,000 \text{ codes possibles}}$

3 b un tel code peut alors être considéré comme un 5-arrangement de $[\![0,9]\!]$
il y a donc $\underline{10\times 9\times 8\times 7\times 6 \text{ codes possibles}}$

3 c on raisonne par choix successifs pour construire un tel code
- on choisit l'emplacement du bloc $\underline{1,2,3}$: $\binom{3}{1}$ possibilités :
$\underline{1\,2\,3\,\_\,\_}$ ou $\underline{\_\,1\,2\,3\,\_}$ ou $\underline{\_\,\_\,1\,2\,3}$
- on choisit 2 chiffres dans l'ensemble $[\![4,9]\!] \cup \{0\}$ qui sont distincts : $\binom{7}{2}$ possibilités
- on choisit l'emplacement de ces 2 chiffres dans les 2 places restantes : 2!

Ainsi il y a : $\binom{3}{1}\times\binom{7}{2}\times 2! = 3\times 21\times 2 = 126$ codes possibles
Il peut faire au max $\underline{125 \text{ essais infructueux}}$

3 d on raisonne par choix successifs :
- on choisit 3 places parmi 5 pour le chiffre 9 : $\binom{5}{3}$ possibilités
- on choisit 1 place pour le chiffre 1 dans les 2 places qui restent : $\binom{2}{1}$ possibilités
- la dernière place est pour le chiffre 5 : 1 possibilité.

Ainsi il y a : $\binom{5}{3}\times\binom{2}{1}\times 1 = 10\times 2\times 1 = 20$ possibilités pour les codes
Il peut faire au max $\underline{19 \text{ essais infructueux}}$

4 Soient k, p et n trois entiers tq $0 \leq k \leq p \leq n$.
$A \subset B$ et $\text{card}(A) = k$ et $\text{card}(B) = p$
- $\underline{\text{choix successifs n}^\circ 1}$: • on choisit la partie A : $\binom{n}{k}$ possibilités puisque A est une k-combinaison d'un ensemble à n éléments
• puis on choisit la partie B : B contient A donc il faut choisir $p-k$ éléments en plus de ceux qui sont des éléments de A, donc il faut choisir ces $p-k$ éléments dans l'ensemble $E\setminus A$ qui est de cardinal $n-k$: $\binom{n-k}{p-k}$ possibilités
↳ cela donne : $\binom{n}{k}\times\binom{n-k}{p-k}$ possibilités pour choisir un couple (A,B)
- $\underline{\text{Choix successifs n}^\circ 2}$: • on choisit la partie B : $\binom{n}{p}$ possibilités puisque B est une p-combinaison d'un ensemble à n éléments
• puis on choisit la partie A : $A \subset B$ donc il faut choisir k éléments qui appartiennent à B : cela fait $\binom{p}{k}$ possibilités
↳ cela donne : $\binom{n}{p}\binom{p}{k}$

$\underline{\text{Finalement}}$: $\boxed{\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p}\binom{p}{k}}$