Chapitre 33 : Couples

Dans tout ce chapitre, (Ω, P) désigne un espace probabilisé.

1 Loi de probabilité

1.1 Loi conjointe ou loi du couple

Définition 1 (couple).

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur (Ω, P), telles que $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$, où l'on suppose que I et J sont des parties de $\mathbb{N}$.
$(X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2,\ \omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega))$ est appelé couple de variables aléatoires discrètes.

L'ensemble des valeurs prises par le couple (X,Y) est $(X,Y)(\Omega)$
$(X,Y)(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$ et ces deux ensembles de $\mathbb{R}^2$ sont finis ou dénombrables.
L'exemple suivant illustre que $(X,Y)(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$ mais que l'inclusion réciproque n'est pas toujours vraie :
Deux urnes contiennent chacune trois jetons numérotés 1, 2 et 3. On extrait au hasard un jeton de chaque urne. On note X le plus petit et Y le plus grand des numéros obtenus.

Considérons deux variables aléatoires discrètes X et Y et deux entiers $x_i \in X(\Omega)$ et $y_j \in Y(\Omega)$. On écrit une fonction qui donne la probabilité que $(X = x_i)$ en même temps que $(Y = y_j)$. C'est la loi de probabilité conjointe.

Définition 2 (Loi conjointe).

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur (Ω, P), telles que $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$, où l'on suppose que I et J sont des parties finies de $\mathbb{N}$.
Associer à chacune des valeurs possibles (x_i, y_j) du couple (X,Y), la probabilité $p_{i,j} = P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$, c'est définir la loi de probabilité conjointe des variables aléatoires X et Y.
Le couple (X,Y) est appelé variable aléatoire à deux dimensions.
La loi conjointe du couple (X,Y) est l'application :

$$X(\Omega) \times Y(\Omega) \to [0,1],\ (x_i, y_j) \mapsto P((X = x_i) \cap (Y = y_j)).$$

Notation : $p_{i,j}$ est encore noté $P(X = x_i, Y = y_j)$ (la virgule remplace alors le symbole d'intersection).

Ainsi, lorsqu'on demande la loi de (X,Y),
- soit on donne $(X,Y)(\Omega)$ et les $p_{i,j}$ pour $(x_i, y_j) \in (X,Y)(\Omega)$,
- soit on donne $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ mais on doit donner tous les $p_{i,j}$ pour $(x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, et il y a peut-être des termes nuls.

Propriété 1.

1. $$\sum_{(x_i,y_j) \in (X,Y)(\Omega)} P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{(i,j) \in I \times J} p_{i,j} = 1.$$
2. *Soit $A \subset R^2$.* $$P((X,Y) \in A) = \sum_{(i,j)/(x_i,y_j) \in A} p_{i,j}.$$
3. *Réciproquement, on admet que la donnée d'une famille $(p_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ de réels positifs ou nuls dont la somme vaut 1, peut représenter la loi conjointe d'un couple (X,Y).*

► Exemple : 1 : Deux urnes contiennent chacune trois jetons numérotés 1, 2 et 3. On extrait au hasard un jeton de chaque urne. On note X le plus petit et Y le plus grand des numéros obtenus. Loi conjointe du couple (X, Y) ?
► Exemple : 2 : Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire deux jetons simultanément. On note X (respectivement Y), la var égale au plus petit (respectivement au plus grand) des deux numéros obtenus. Déterminer la loi du couple (X, Y).

1.2 Loi de probabilité marginale

Lorsqu'on connaît la loi conjointe des variables aléatoires X et Y, on peut aussi s'intéresser à la loi de probabilité de X seule et de Y seule. Ce sont les lois de probabilité marginales.

Définition 3 (Lois marginales).

On appelle lois marginales les lois de X et de Y.
Plus précisément, les lois de probabilité marginales de X et Y sont définies respectivement par

$$\forall x_i \in X(\Omega),\ P(X = x_i) = \sum_{y_j \in Y(\Omega)} P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{j \in J} p_{i,j} = p_{i,.}$$
$$\forall y_j \in Y(\Omega),\ P(Y = y_j) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{ji \in I} p_{i,j} = p_{.,j}$$

Remarque 1. *La donnée seule des lois marginales ne détermine pas la loi conjointe.*
Si la loi de probabilité conjointe du couple (X, Y) est présentée dans un tableau à double entrée, nous obtiendrons la loi de probabilité marginale de X en sommant les $p_{i,j}$, suivant l'indice j (par colonnes) et celle de Y en sommant les $p_{i,j}$ suivant l'indice i (par lignes).
Le couple (X, Y) et les deux variables X et Y constituent trois variables aléatoires distinctes. La première est à deux dimensions, les deux autres à une dimension.

► Exemple : 3 : déterminer les lois marginales de l'exemple 1.
► Exemple : 4 : déterminer les lois marginales de l'exemple 2.

1.3 Loi de probabilité conditionnelle

Nous avons vu dans un chapitre précédent comment déterminer la probabilité de réalisation de deux événements lorsqu'ils sont dépendants l'un de l'autre. Pour cela, nous avons introduit la notion de probabilité conditionnelle en posant

$$p(B|A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)}.$$

La notion équivalente dans le cas d'un couple de variables aléatoires est celle de loi de probabilité conditionnelle permettant de mesurer la probabilité que X soit égale à une valeur donnée lorsqu'on connaît déjà la valeur que prend Y.

Définition 4.

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur (Ω, P), telles que $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$, où l'on suppose que I et J sont des parties finies de $\mathbb{N}$.
Soit $x_i \in \Omega$ tel que la probabilité que X prenne la valeur x_i n'est pas nulle.
La loi conditionnelle de Y sachant $(X = x_i)$ est l'application définie par

$$\forall j \in J,\ y_j \mapsto P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{P(X = x_i, Y = yj)}{P(X = x_i} = \frac{p_{i,j}}{p_{i,.}}$$

C'est la loi de Y pour la probabilité $P_{X=x_i}$.
On pourra noter $Y|_{X=x_i}$ une var dont la loi est la loi conditionnelle de Y sachant $X = x_i$.

De même, si l'on suppose que la probabilité que Y prenne la valeur y_j n'est pas nulle, alors la probabilité conditionnelle de $(X = x_i)$ sachant que $(Y = y_j)$ s'est réalisé est définie par

$$\forall i \in I,\ x_i \mapsto P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = yj)}{P(Y = y_j} = \frac{p_{i,j}}{p_{\cdot,j}}$$

Remarque 2.
— *Si on connait la loi conjointe, on connait les lois marginales et les lois conditionnelles.*
— *Si on connait la loi de X et les lois conditionnelles de Y sachant $X = x_i$, alors on connait la loi conjointe puis la loi de Y.*

► Exemple : 5 : Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $Y = 2$ (X et Y définis dans l'exemple 2).

2 Variables aléatoires indépendantes

2.1 Indépendances de 2 variables aléatoires

Définition 5.

X et Y sont indépendantes ssi $\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$.

Remarque 3.
1. *Pour montrer que deux variables X et Y ne sont pas indépendantes, il suffit de trouver un couple (x, y) pour lequel $P(X = x, Y = y) \neq P(X = x)P(Y = y)$.*
2. *En particulier, si $(X, Y)(\Omega) \neq X(\Omega) \times Y(\Omega)$, les variables ne seront pas indépendantes. Il suffit pour cela de prendre un couple appartenant à $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ mais pas à $(X, Y)(\Omega)$.*
3. *Lorsque deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes, la loi conditionnelle de X, pour toute valeur de Y, est identique à la loi de X et la loi conditionnelle de Y, pour toute valeur de X, est identique à la loi de Y.*
4. *Lorsque deux variables aléatoires sont indépendantes, les lois marginales déterminent la loi conjointe.*

► Exemple : 6 : Les variables X et Y de l'exemple 2 sont-elles indépendantes ?

Propriété 2.

Si X et Y sont deux vard indépendantes, alors pour toute var fonction de X et toute var fonction de Y sont indépendantes.

Par exemple, si X et Y sont indépendantes, X^3 et $1 + Y$ aussi.

2.2 Indépendance de n var aléatoires

Définition 6 (vard mutuellement indépendantes).

Les n var $X_1, \cdots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si

$$\forall (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ P(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i).$$

Propriété 3.

1. *Toute sous-famille d'une famille de vard indépendantes est formée de var indépendantes.*
2. *Si $X_1, \cdots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, elles sont 2 à 2 indépendantes.*
3. *Si $X_1, \cdots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors $u_1(X_1), \cdots, u_n(X_n)$ aussi, où les u_i sont des fonctions d'une variable.*
4. *Si $X_1, \cdots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors toute var fonction de certaines de ces vard est indépendante de toute var fonction d'autres de ces vard. Autrement dit $u(X_1, \cdots, X_p)$ et $v(X_{p+1}, \cdots, X_n)$ sont deux var indépendantes. En particulier, si $X_1, \cdots, X_{n+1}$ sont mutuellement indépendantes, alors $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)$ et X_{n+1} sont indépendantes.*

Définition 7 (Suite de var indépendantes).

On dit que l'on a une suite de var $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes si pour tout entier p non nul, $X_1, \cdots, X_p$ sont indépendantes.

Application à la modélisation d'un jeu de pile ou face infini par une suite de vairables de Bernoulli mutuellement indépendantes.

2.3 Exemples de somme de var indépendantes

Si X et Y deux var à valeurs dans $\mathbb{N}$ et indépendantes alors pour la loi de $X+Y$ on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(X+Y=n) = \sum_{i\in X(\Omega)} P(X=i)P(Y=n-i) = \sum_{j\in Y(\Omega)} P(X=n-j)P(Y=j)$$

Théorème 1 (Somme de var de Bernoulli).

La somme de n var indépendantes qui suivent une loi $\mathcal{B}(p)$ suit une loi $\mathcal{B}(n,p)$.

3 Etude de $u(X,Y)$: Pas de cours, que des exercices

3.1 Loi de $u(X,Y)$

Le résultat suivant est à retrouver dans chaque cas particulier : détermination par exemple de la loi de XY, de $|X-Y|$, de $\max(X,Y)$,...

Théorème 2 (Loi de $u(X,Y)$).

Soit (X,Y) un couple de variables discrètes.
Soit u une fonction, définie au moins sur $(X,Y)(\Omega)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Alors $Z=u(X,Y)$ est une variable dont la loi est définie par :

$$\forall z \in Z(\Omega),\ P(Z=z) = \sum_{(i,j)\ \mid\ u(x_i,y_j)=z} P(X=x_i, Y=y_j).$$

3.2 Espérance de $u(X,Y)$

Théorème 3 (Théorème de transfert).

Soit (X,Y) un couple de variables discrètes.
Soit u une fonction, définie au moins sur $(X,Y)(\Omega)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
La var $Z=u(X,Y)$ admet une espérance ssi la série double $\sum_{(i,j)} u(x_i,y_j)P(X=x_i,Y=y_j)$ converge absolument et en cas de convergence,

$$E(Z) = \sum_{(i,j)} u(x_i,y_j)P(X=x_i, Y=y_j).$$

▶ Exemple : 7 : Calculer $E(XY)$ dans les exemples 1 et 2.

4 Covariance

Lorsque deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes, il existe une caractéristique qui permet de déterminer l'intensité de leur dépendance. C'est la covariance.

Définition 8 (Covariance).

Soit X et Y deux var admettant une espérance.
On dit que le couple (X, Y) admet une covariance si $(X - E(X))(Y - E(Y))$ admet une espérance et on note

$$cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))).$$

Théorème 4 (Théorème de Koenig Huygens pour les couples).

Si X et Y sont deux var admettant une espérance, $cov(X, Y)$ existe ssi $E(XY)$ existe et

$$cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

► Exemple : 8 : Calculer $cov(X, Y)$ dans l'exemple 2.

Propriété 4.

1. *La covariance est symétrique :*
   si X et Y sont deux var admettant une espérance, $cov(X, Y) = cov(Y, X)$
2. *La covariance est bilinéaire :*
   si X,Y et Z sont trois var admettant une espérance, et si (a, b) est un couple de réels,
   $cov(aX + bY, Z) = acov(X, Z) + bcov(Y, Z)$ *et* $cov(X, aY + bZ) = acov(X, Y) + bcov(X, Z)$
3. $cov(X, X) = V(X)$

Propriété 5.

Si X et Y sont deux var admettant des variances, alors $cov(X, Y)$ existe et

1. *$X + Y$ admet une variance et $V(X + Y) = V(X) + 2cov(X, Y) + V(Y)$*
2. *$X - Y$ admet une variance et $V(X - Y) = V(X) - 2cov(X, Y) + V(Y)$*
3. *Si X et Y admettent des variances alors $X + Y$ et $X - Y$ aussi, $cov(X, Y)$ existe et on a la relation :*

$$cov(X, Y) = \frac{1}{4}\left(V(X + Y) - V(X - Y)\right)$$

4. *Si X et Y admettent des variances et si (a, b) est un couple de réels alors $aX + bY$ admet aussi une variance et*

$$V(aX + bY) = a^2V(X) + 2abcov(X, Y) + b^2V(Y)$$

5. *Généralisation :*
   Si X_1, ..., X_n admettent des variances, alors pour tout $(i, j) \in [[1, n]]^2$, $cov(X_i, X_j)$ existe et $X_1 + \cdots + X_n$ admet une variance et

$$V(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} cov(X_i, X_j)$$

Théorème 5 (Cas des variables aléatoires indépendantes).

Si X et Y sont indépendantes et admettent une espérance, alors

— $E(XY) = E(X)E(Y)$
— $cov(X, Y) = 0$
— *On suppose de plus que X et Y admettent une variance. Alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$*

Attention, la réciproque est fausse ! Deux variables de covariance nulle ne sont pas obligatoirement indépendantes.

Propriété 6 (var d'une somme de var indépendantes).

> *Si X_1, ..., X_n sont indépendantes alors* $V(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$.

► Exemple : 9 : Retrouver la variance d'une loi binomiale.

5 Exercices du TD 33

Exercice 1. *Réfce 235*

1. *Soient X et Y deux v.a.r. discrètes indépendantes de même variance non nulle.*
   On pose $U = aX + bY$ et $V = X + \mu Y$ où a, b, ℓ et μ sont quatre réels.
   Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a, b, ℓ et μ pour que U et V soient non corrélées.
2. *Soit X une v.a.r. telle que $E(X) = V(X) = 100$. Soit $Z = 3X - 10$.*
   Calculer $E(Z)$, $V(Z)$, $cov(X, Z)$ et $V(X + Z)$.
   Soit alors Y indépendantes de X telle que $E(Y) = V(Y) = 100$. Calculer $V(X + Y + Z)$ et $cov(Y + Z, X)$.

Exercice 2. *Réfce 239*

Soit $n \geq 2$. Une urne contient $n - 2$ boules noires et 2 boules blanches.
On tire toutes les boules une à une sans remise.
On note X (resp. Y) la v.a.r. égale au rang de la première (resp. deuxième) boule blanche tirée.

1. *Déterminer la loi de X.*
2. *Déterminer la loi conjointe de (X, Y) et retrouver celle de X.*
3. *Déterminer la loi de $Y - X$. En déduire la covariance de X et Y.*

Exercice 3. *Réfce 240*

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes suivant la même loi $\mathcal{B}(p)$ où $p \in]0; 1[$.
Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_i = X_i - 2X_{i+1} + X_{i+2}$.

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer l'espérance et la variance de* $T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$.
2. *Info Ecrire une fonction Xi qui prend comme argument un entier n et sort une liste donnant $X_1 ... X_n$.*
   L'utiliser pour écrire une fonction Yi qui prend comme argument un entier n et sort une liste donnant $Y_1 ... Y_n$.

Exercice 4. *Réfce 241*

Soient (X, Y) un couple de v.a.r. indépendantes.
On suppose que X et Y suivent respectivement les lois $\mathcal{B}(n, 1/4)$ et $\mathcal{B}(n, 3/4)$.
On définit la matrice $A = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 2 & Y \end{pmatrix}$.

1. *Calculer la probabilité que A soit inversible.*
2. *Calculer la probabilité que A soit diagonalisable.*