Chapitre 35 : Notions sur les fonctions de deux variables réelles

Introduction

En mathématiques, une fonction de plusieurs variables f est la donnée d'un ensemble de départ E (espace de dimension n), d'un ensemble d'arrivée F et d'une relation associant à chaque n-uplet $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'éléments de l'ensemble de départ un et un seul élément de l'ensemble d'arrivée, que l'on appelle image de x par f et que l'on note $f(x)$ ou $f(x_1, \ldots, x_n)$:

$$f : E \longrightarrow F,\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n).$$

Dans tout ce chapitre $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme [1] euclidienne usuelle (c'est-à-dire associée au produit scalaire euclidien canonique usuel), notée $||.||$ ou N_2. On a $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ N_2(x) = ||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

1 Espace $\mathbb{R}^2$

Définition 1 (Ensembles particuliers de $\mathbb{R}^2$).

1. *On appelle* ***boule fermée de rayon*** r ***et de centre*** $a \in E$ *l'ensemble noté* $B_f(a, r) = \{u \in E\ ;\ N_2(u - a) \leqslant r\}$; *lorsque* $r = 1$, *et* $a = 0$, *on parle de boule unité fermée.*
2. *On appelle* ***boule ouverte de rayon*** r ***et de centre*** $a \in E$ *l'ensemble noté* $B_o(a, r) = \{u \in E\ ;\ N_2(u - a) < r\}$; *lorsque* $r = 1$, *et* $a = 0$, *on parle de boule unité ouverte.*
3. *On appelle* ***sphère de rayon*** r ***et de centre*** $a \in E$ *l'ensemble noté* $S(a, r) = \{u \in E\ ;\ N_2(u - a) = r\}$; *lorsque* $r = 1$, *et* $a = 0$, *on parle de sphère unité.*

Remarque 1. $B_f(a, r) = B_o(a, r) \cup S(a, r)$.

Définition 2 (Partie bornée d'un espace vectoriel normé).

Soit $A \subset \mathbb{R}^2$; *on dit que* A *est une partie bornée de* $\mathbb{R}^2$ *lorsque*

$$(\exists r \in \mathbb{R}_+) \quad (\forall u \in A) \quad N_2(u) \leqslant r.$$

► Exemple : Dans $(\mathbb{R}^2, N_2)$ le pavé $[a, b] \times [c, d]$ est borné.

Propriété 1.

Soit A *et* B *deux parties de* $\mathbb{R}^2$.

1. *Si* $A \subset B$ *et* B *bornée, alors* A *est aussi bornée.*
2. *Si* A *ou* B *est bornée alors* $A \cap B$ *est bornée.*
3. *Si* A *et* B *sont bornées alors* $A \cup B$ *est bornée.*

1. Il existe d'autres normes sur $\mathbb{R}^2$: $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ N_1(x) = |x_1| + |x_2|$ et $N_\infty(x) = \sup(|x_1|, |x_2|)$. Revoir la définition d'une norme sur un espace vectoriel E, chapitre 31 - définition 3. Lorsqu'un espace vectoriel E est muni d'une norme N, on dit que le couple (E, N) est un espace vectoriel normé.

Définition 3 (Ouvert de $\mathbb{R}^2$).

*$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un **ouvert de** $\mathbb{R}^2$ lorsque*

$$\forall u \in \Omega, \quad \exists \rho > 0, \quad B_o(u, \rho) \subset \Omega$$

Remarque 2.

1. *$B_f(a, r)$ n'est pas un ouvert.*
2. *Les pavés ouverts $]a, b[\times]c, d[$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$.*

Propriété 2.

Toute boule ouverte de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2 Fonctions numériques de deux variables réelles

On s'intéresse ici aux fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$.
On appelle **domaine ou champ de définition** l'ensemble $E = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid f(u) \text{ existe}\}$.
► Exemple : Trouver le domaine de définition de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \sqrt{(x + y)(x - y + 1)}$.

Propriété 3 (Structure de l'ensemble des fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$).

Soit A un ouvert de $\mathbb{R}^2$. L'ensemble des fonctions de deux variables définies de A dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et un anneau commutatif non intègre.

Définition 4 (Limite et continuité d'une fonction de deux variables).

Soit $a = (a_1, a_2) \in A$ et f définie sur $A' = A \setminus \{a\}$ ou A.

1. *On dit que f admet pour limite $l \in \mathbb{R}$ en a, lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \rho > 0, \quad \forall (x, y) \in B_o(a, \rho) \cap A' \quad |f(x, y) - l| \leqslant \varepsilon$$

ou de façon équivalente

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \rho > 0, \quad \forall (x, y) \in A' \quad \|(x, y) - (a_1, a_2)\| < \rho \Rightarrow |f(x, y) - l| \leqslant \varepsilon$$

2. *$\forall b \in A$, f est **continue en** b ssi $\lim\limits_{(x,y) \to b} f(x, y) = f(b)$ ssi*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \rho > 0, \quad \forall (x, y) \in A' \quad \|(x, y) - (b_1, b_2)\| < \rho \Rightarrow |f(x, y) - f(b_1, b_2)| \leqslant \varepsilon$$

Remarque 3.

— *Si f admet une limite l en a, alors celle-ci est unique, et on peut donc noter $\lim\limits_{(x,y) \to a} f(x, y) = l$.*
— *On peut remplacer l par $\pm\infty$: $\lim\limits_{(x,y) \to a} f(x, y) = +\infty$ ssi*

$$\forall A > 0, \quad \exists \rho > 0, \quad \forall (x, y) \in A' \quad \|(x, y) - (a_1, a_2)\| < \rho \Rightarrow |f(x, y)| > A$$

► Exemple : Soit f définie par $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. Montrer que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Propriété 4.

Toutes les propriétés relatives à la somme, au produit, au quotient et à la composée sur les limites et sur la continuité des fonctions d'une variable réelles restent vraies pour les fonctions de deux variables réelles. L'ensemble des fonctions définies sur un ouvert A de $\mathbb{R}^2$ et continues en $(a, b) \in A$ est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de l'ensemble des fonctions définies de A dans $\mathbb{R}$, stable par quotient lorsque le dénominateur ne s'annule pas en (a, b).

Remarque 4. 1. *En particulier les fonctions polynômes et les fractions rationnelles de deux variables sont continues là où elles sont définies.*

2. *Les projections canoniques sont des applications continues en tout point de* $\mathbb{R}^2$. $p_1 : \left| \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) \mapsto x_1 \end{array} \right.$ *et* $p_2 : \left| \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) \mapsto x_2 \end{array} \right.$.

3. *Pour montrer que* f *admet une limite* l *en* (a,b), *il faut chercher à majorer* $|f(x,y) - l|$ *en faisant apparaître* $||x-a, y-b||$.

► Exemple : Soit f définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2 y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. f est-elle continue en $(0,0)$?

3 Calcul différentiel

Définition 5 (Dérivées partielles d'ordre 1).

Soient A *ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *et* $f : A \to \mathbb{R}$.
Soit (e_1, e_2) *la base canonique de* $\mathbb{R}^2$.
Soient $\alpha = (a,b) \in A$.

— *On appelle première fonction partielle de* f *en* α *la fonction* $t \mapsto f(\alpha + te_1)$. *Si cette fonction est dérivable en 0, c'est-à-dire si* $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a+t,b) - f(a,b)}{t}$ *est finie, on dit que* f *admet* ***une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable en*** α *et on note ce nombre dérivé* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ *ou* $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a,b)$ *ou* $\partial_1 f(a,b)$.

— *On appelle deuxième fonction partielle de* f *en* α *la fonction* $t \mapsto f(\alpha + te_2)$. *Si cette fonction est dérivable en 0, c'est-à-dire si* $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a,b+t) - f(a,b)}{t}$ *est finie, on dit que* f *admet* ***une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la deuxième variable en*** α *et on note ce nombre dérivé* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ *ou* $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a,b)$ *ou* $\partial_2 f(a,b)$.

— *Si pour tout* $\alpha \in A$, *les limites précédentes existent, alors on peut définir les fonctions* $\partial_1 f$ *et* $\partial_2 f$ *sur* A *tout entier.*

► Exemple : $f : (x,y) \longmapsto \sin x \cos y$ et $(a,b) = \left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$

► Exemple : Soit f définie par $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. f admet en $(x,y) \neq (0,0)$ des dérivées partielles : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y^3 - yx^2}{(x^2+y^2)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \dfrac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2}$.

Définition 6 (Fonction de deux variables de classe $\mathcal{C}^1$).

1. f ***est de classe*** $\mathcal{C}^1$ ***sur*** A *si ses dérivées partielles existent et sont continues sur* A.
2. *On dit que* f *admet en* $(a,b) \in A$ *un développement limité d'ordre* 1 *lorsqu'il exsite* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *et une fonction* ε_1 *de* A *vers* $\mathbb{R}$ *tels que*

$$f(x,y) = f(a,b) + (x-a)\alpha + (y-b)\beta + \|(x,y) - (a,b)\| \varepsilon_1(x,y)$$

avec $\lim\limits_{(x,y) \to (a,b)} \varepsilon_1(x,y) = 0$.

► Exemple : Les applications polynomiales, les fonctions rationnelles et les expressions trigonométriques sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

► Exemple : $r \ : \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car ses dérivées partielles sont continues sur U. $\theta \ : \ \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \ (x,y) \mapsto \arctan \dfrac{y}{x}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

Théorème 1 (Théorème fondamental admis).

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A alors

$$\forall (x,y),(a,b) \in A, \quad f(x,y) = f(a,b) + (x-a)\,\partial_1 f(a,b) + (y-b)\,\partial_2 f(a,b) + \|(x,y)-(a,b)\|\,\varepsilon(x,y)$$

avec $\lim\limits_{(a,b)} \varepsilon = 0$; donc f admet en tout (a,b) un développement limité d'ordre 1.

Approximation linéaire de $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0)$.
► Exemple : Surface Σ d'équation $z = g(x,y)$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $g\ :\ U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
Pour tout $(x_0,y_0) \in U$, le plan tangent à Σ en $x_0, y_0, g(x_0,y_0)$ a pour équation :

$$z = g(x_0,y_0) + (x-x_0)\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Propriété 5 (Ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $A \subset \mathbb{R}^2$).

1. *L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $A \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est stable par combinaison linéaire ainsi que par produit.*
   Pour $f, g\ :\ A \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et $\lambda \in \mathbb{R}$,
   pour tout $i \in \{1,2\}$, $\dfrac{\partial(f+g)}{\partial x_i} =$
   pour tout $i \in \{1,2\}$, $\dfrac{\partial(\lambda f)}{\partial x_i} =$
   pour tout $i \in \{1,2\}$, $\dfrac{\partial(fg)}{\partial x_i} =$
2. *Un quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur A dont le dénominateur ne s'annule pas sur A est encore de classe $\mathcal{C}^1$ sur A.*
   Pour $f, g\ :\ A \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur A telles que $g$ne s'annule pas sur A,
   pour tout $i \in \{1,2\}$, $\dfrac{\partial \frac{f}{g}}{\partial x_i} =$
3. *Si φ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $A \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs dans $I \subset \mathbb{R}$ et f de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}$, alors $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de plus*

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial x} &= (f'\circ\varphi) \times \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial y} &= (f'\circ\varphi) \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{aligned}$$

Propriété 6 (Le caractère $\mathcal{C}^1$ implique la continuité).

Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert A de $\mathbb{R}^2$ est continue sur A.

Définition 7 (Dérivée selon un vecteur).

Soient A ouvert de $\mathbb{R}^2$, (a,b) un élément de A et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur A. On appelle dérivée de f selon le vecteur $h \in \mathbb{R}^2$ en (a,b) le nombre $D_h f(a,b)$ tel que :

$$\forall h = (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad D_h f(a,b) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

On peut remarquer que $h \mapsto D_h f(a,b)$ est une forme linéaire.
Exemple : Soit $f\ :\ R^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = x^2 + xy + y^3$. Déterminer la dérivée de f selon le vecteur $(1,1)$ en (x,y).

4 Règle de la chaîne

Théorème 2 (Règle de la chaîne).

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ de A sur $\mathbb{R}$ où A est une partie de $\mathbb{R}^2$, et soit φ_1 et φ_2 deux applications $\mathcal{C}^1$ d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $t \in I$, $(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \in A$.
$h : t \mapsto f(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ est $\mathcal{C}^1$ sur I et de plus, on a :
$\forall t \in I,\ h'(t)$
$= \dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(t), \varphi_2(t))\varphi_1'(t) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi_1(t), \varphi_2(t))\varphi_2'(t)$

► Exemple : Soit $f : (x, y) \longmapsto x^2 - y^2$ et $g : t \longmapsto (r(t)\cos t, r(t)\sin t)$, où r est une fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors

$$(f \circ g)'(t) = 2r(t)\cos t\,(r'(t)\cos t - r(t)\sin t) - 2r(t)\sin t\,(r'(t)\sin t + r(t)\cos t)$$

Propriété 7 (Dérivées partielles de $(a, b) \mapsto f(\varphi_1(a, b), \varphi_2(a, b))$).

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et soit φ_1 et φ_2 deux applications $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert V de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $(a, b) \in V$, $(\varphi_1(a, b), \varphi_2(a, b)) \in A$.
Alors $F : (a, b) \mapsto f(\varphi_1(a, b), \varphi_2(a, b))$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur V et on a pour tout $(a, b) \in V$:

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial a}(a,b) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(a,b), \varphi_2(a,b))\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial a}(a,b) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi_1(a,b), \varphi_2(a,b))\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial a}(a,b) \\ \dfrac{\partial F}{\partial b}(a,b) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(a,b), \varphi_2(a,b))\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial b}(a,b) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi_1(a,b), \varphi_2(a,b))\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial b}(a,b) \end{cases}}$$

► Exemple : Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U \subset \mathbb{R}^2$ et $\varphi : (u, v) \longmapsto (2u + v, u - 2v)$ et $F = f \circ \varphi$, déterminer les dérivées partielles de F.

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial u}(u,v) = 2\dfrac{\partial f}{\partial x}(2u+v, u-2v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(2u+v, u-2v) \\ \dfrac{\partial F}{\partial v}(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(2u+v, u-2v) - 2\dfrac{\partial f}{\partial y}(2u+v, u-2v) \end{cases}.$$

Remarque : lorsqu'on a une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ définie par $(x, y) \mapsto f(x, y)$ et que l'on pose $x = \varphi_1(a, b)$ et $y = \varphi_2(a, b)$, on dit qu'on fait un changement de variables. En posant $F(a, b) = f(x(a, b), y(a, b))$ on peut appliquer les formules précédentes.

Propriété 8 (Cas particulier des coordonnées polaires : $\varphi_1(r, \theta) = x$ et $\varphi_2(r, \theta) = y$).

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ F définie sur $\mathbb{R}^2$ par $F(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ (donc $F(r, \theta) = f(x, y)$), alors F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et de plus pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta \\ \dfrac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) = -\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\sin\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\cos\theta \end{cases}$$

5 Gradient

Définition 8 (Vecteur gradient).

Lorsque f est $\mathcal{C}^1$ sur A, ouvert de $\mathbb{R}^2$ on appelle gradient de f en $(a, b) \in A$ le vecteur de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b), \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$ noté $\nabla f(a, b)$ dans la base canonique.

► Exemple : Soit $r : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$, en tout point $(a, b) \neq (0, 0)$,

$$\nabla r(a,b) = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{r(a,b)} \\ \dfrac{b}{r(a,b)} \end{pmatrix} = \frac{1}{r(a,b)} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},.$$

Exemple : en électrostatique, la relation $E = -\text{grad}V$ fait intervenir le gradient (champ électrostatique).
Expression du développement limité à l'aide du gradient

Propriété 9.

Avec les notations précédentes,
$\forall v \in \mathbb{R}^2, \quad D_v f(a,b) = \nabla f(a,b) . v$

Propriété 10 (Lignes de niveau $f(x, y) = \lambda$).

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
On considère un réel λ et la ligne de niveau $\Gamma = \{(x, y) \in U, \ f(x, y) = \lambda\}$.
En un point $M_0(x_0, y_0)$ de la courbe Γ où le vecteur gradient $\nabla f(x_0, y_0)$ est défini, il est orthogonal à Γ et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.

Démonstration : Soit $(a, b) \in A$, considérons la ligne de niveau $\{(x, y) \ ; f(x, y) = f(a, b)\}$, on suppose que cette ligne de niveau peut être paramétrée par (I, f) avec $g : t \mapsto (x(t), y(t))$ application de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ; alors, en tout point $M(t)$ où $(x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$, la ligne de niveau possède une tangente qui est orthogonale à $\nabla f(x(t), y(t))$. Montrons le.
Puisque $t \mapsto f(x(t), y(t))$ est constante sur I,

$$\forall t \in I, \quad \frac{d}{dt}(f(x(t), y(t))) = 0$$

mais aussi, $t \mapsto f(x(t), y(t))$ est une composée d'applications dérivables, et les formules de dérivation des fonctions composées donnent :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f(x(t), y(t))) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) y'(t) \\ &= \left(\text{grad}_{(x(t),y(t))} f\right) . (x'(t), y'(t)) \end{aligned}$$

Donc les vecteurs $\text{grad}_{(x(t),y(t))} f$ et g' sont orthogonaux.

Exemples : Le champ électrostatique est E est normal aux équipotentielles.

Si on considère un milieu continu homogène soumis à un champ de température et si l'on se place dans le cadre de la première loi de Fourier, alors $j_Q = -\lambda \nabla T$, où j_Q est le vecteur densité de flux thermique et λ est la conductance thermique et $T: A \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ qui représente la température (A est un ouvert de $\mathbb{R}^3$). Le vecteur densité de flux thermique est orthogonal aux surfaces isothermes et orienté dans le sens des températures décroissantes.

6 Extremums d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

Définition 9 (Extremum d'une fonction de deux variables).

1. *On dit que f présente un maximum, (respectivement minimum) local en (a, b) lorsque*

$$\exists r > 0, \quad \forall (x, y) \in B((a, b), r) \cap A \ \ f(x, y) \leqslant f(a, b) \ \ (\text{resp } f(x, y) \geqslant f(a, b))$$

2. *On dit que f présente un maximum, (respectivement minimum) global en (a, b) lorsque*

$$\forall (x, y) \in A \ \ f(x, y) \leqslant f(a, b) \ \ (\text{resp } f(x, y) \geqslant f(a, b))$$

3. *Lorsque f présente un minimum ou un maximum local (respectivement global) en (a, b) on dit que f présente un extremum local (respectivement global) en (a, b).*

► Exemple : $\varphi : (x,y) \longmapsto x^2+y^2$ présente un minimum global en $(0,0)$.

Propriété 11 (Condition nécessaire mais non suffisante d'existence d'un extremum).

*Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un **ouvert** A de $\mathbb{R}^2$. Si f présente en $(a,b)\in A$ un extremum local, alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$ (et donc aussi $\forall v \in \mathbb{R}^2,\ D_v f(a,b) = 0$).*

Remarque 5.

1. *Attention : vérifier que A est ouvert ! $f : \left|\begin{array}{l} A = B_f(0,r) \to \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto x^2+y^2 \end{array}\right.$ f présente un maximum local et même global en chaque point de la sphère de rayon r mais les dérivées partielles ne s'y annulent pas...*
2. *Les points qui vérifient $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$ sont appelés **points critiques**.*
3. *Un point critique qui n'est pas un extremum est appelé **point col** ou **point selle**.*

► Exemple : A : Pour $f(x,y) = y\left(y-x^2\right)$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2xy$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(2y-x^2\right)$ donc $(0,0)=0$ est un point critique et pourtant $f(0,0)=0$, $f\left(x,\dfrac{x^2}{2}\right) = -\dfrac{x^4}{4} < 0$ pour $x\neq 0$ et $f(0,y) = y^2 > 0$ pour $y \neq 0$, donc f ne présente pas d'extremum en $(0,0)$ (point col).

► Exemple : B : Soit $f(x,y) = x^2+y^2-2x-4y$. Montrer que f admet un seul point critique sur $\mathbb{R}^2$ et que f présente un minimum global en ce point.

► Méthode : Pour la recherche des points de A où f présente un extremum local :

1. se placer sur un ouvert où f est $\mathcal{C}^1$,
2. chercher les points critiques,
3. parmi les points critiques obtenus, chercher ceux pour lesquels f présente vraiment un extremum.

► Exemple : C :Soit $f(x,y) = 5x^2+2y^2-2xy-2x-8y$. Recherche d'extrema pour f sur $\mathbb{R}^2$.

► Exemple : D :Soit $f(x,y) = x^3+y^3-3xy$. Recherche d'extrema pour f sur $\mathbb{R}^2$.

► Exemple : E :Soit $f\ :\ [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R},\ x^2+y^2-xy$. Recherche d'extrema pour f.

7 Exercices

Exercice 1. *Réf. 340*
Soit $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \leq 1\}$. Déterminer les extremas de la fonction f définie sur D par :

$$f\ :\ (x,y)\mapsto x^2+xy+y^2.$$

Exercice 2. *Réf. 341*
On pose $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f(0,0)=0$

1. *Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.*
2. *Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.*
3. *f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.*

Exercice 3. *Réf. 342*
On pose $f(x,y) = \dfrac{y^4}{\sqrt{x^2+y^2-xy}}$ et $f(0,0)=0$

1. *Montrer que $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2-xy \geq \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.*

2. *Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.*
3. *Justifier l'existence et calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.*
4. *Justifier l'existence et donner la valeur de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$*
5. *f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.*

Exercice 4. *Réf. 345*
Déterminer les applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur U vérifiant les équations aux dérivées partielles suivantes :

1. *Soit $U = \mathbb{R}^2$. $\forall (x,y) \in U,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.*
   On utilisera le changement de variable affine : $u = x+y$, $v = x-y$ et on posera $g(u,v) = f\left(x(u,v), y(u,v)\right)$.
2. *Soit $U = \mathbb{R}^2$. $\forall (x,y) \in U,\ 2\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 y$.*
   On utilisera le changement de variable affine : $u = x$, $v = x + 2y$ et on posera $g(u,v) = f\left(x(u,v), y(u,v)\right)$.
3. *Soit $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0\}$. $\forall (x,y) \in U,\ x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.*
   On utilisera le changement de variable en coordonnées polaires : $x = r\cos\theta$, $Y = r\sin\theta$ et on posera $g(r,\theta) = f\left(x(r,\theta), y(r,\theta)\right)$.