

Exercice 211

1) $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$

Soit R_i : "tirer une boule rouge au tirage i ."

$P(X=1) = P(R_1) = \frac{4}{7}$ car il y a équiprobabilité

$P(X=2) = P(\bar{R}_1 \cap R_2) \stackrel{\text{FAC}}{=} P(\bar{R}_1) \times P(R_2 | \bar{R}_1) = \frac{3}{7} \times \frac{4}{6}$

$P(X=3) = P(\bar{R}_1 \cap \bar{R}_2 \cap R_3) \stackrel{\text{FAC}}{=} P(\bar{R}_1) \times P(\bar{R}_2 | \bar{R}_1) \times P(R_3 | \bar{R}_1 \cap \bar{R}_2) = \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{5}$

$P(X=4) = P(\bar{R}_1 \cap \bar{R}_2 \cap \bar{R}_3 \cap R_4) = \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{4}$

2) $X \sim B(n, p)$, $Y \sim X^2$.

Par le th de transfert, $E(Y) = E(X^2) = E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X=x)$

$E(Y) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 P(X=x) = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ où $q = 1-p$.

Reprenons les calculs faits pour déterminer la variance de X .

On obtient: $E(X^2) = npq + n^2 p^2$

Autre méthode: $E(Y) = E(X^2) = V(X) + (E(X))^2$ par la formule de König-Huygens $E(Y) = npq + (np)^2$.

1) Retour à $E(X) = 1 \times \frac{4}{7} + 2 \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} + 3 \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} + 4 \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{5}$.

Ex 5

- ① $X(\Omega) = \llbracket 1, m \rrbracket$ car si le numéro 1 est tiré alors X prend la valeur 1 et si à tous les tirages le numéro m est obtenu alors X prend la valeur m et toutes les valeurs entières intermédiaires sont possibles.

Soit $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$

Soit $i \in \mathbb{N}$, $P(X_j > i) = P\left(\bigcup_{k'=i+1}^m (X_j = k')\right) = \sum_{k'=i+1}^m P(X_j = k') = \sum_{k'=i+1}^m \frac{1}{m} = \frac{m-i}{m}$

où X_j est la var. égale au numéro du jeton obtenu au j^{e} tirage.

Par caractérisation du min, $(X > i) = \left(\bigcap_{j=1}^k X_j > i\right)$

$$P(X > i) = \prod_{j=1}^k P(X_j > i) = \prod_{j=1}^k \frac{m-i}{m} = \left(\frac{m-i}{m}\right)^k$$

Ainsi $P(X = i) = P(X > i-1) - P(X > i)$ pour tout $i \geq 1$.

$$= \left(\frac{m-(i-1)}{m}\right)^k - \left(\frac{m-i}{m}\right)^k \quad \text{tel que } i \leq m$$

② $E(X) = \sum_{j=0}^m P(X > j) = \sum_{j=0}^{m-1} P(X > j)$ car $P(X > m) = 0$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} P\left(\bigcup_{i=j+1}^m (X=i)\right) = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=j+1}^m P(X=i) = \sum_{0 \leq j < i \leq m} P(X=i)$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{i-1} P(X=i) = \sum_{i=1}^m \left(P(X=i) \sum_{j=0}^{i-1} 1\right) = \sum_{i=1}^m i P(X=i) = E(X)$$

donc $E(X) = \sum_{j=0}^m \left(\frac{m-j}{m}\right)^k$

③ $\frac{1}{m} E(X) = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^m \left(1 - \frac{j}{m}\right)^k$ on reconnaît une somme de Riemann

Considérons $f: x \mapsto (1-x)^k$ est cont. sur $[0, 1]$, on peut dire que

$$\left(\frac{1}{m} E(X)\right)_{m \geq 1} \text{ CN et } \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} E(X) = \int_0^1 (1-x)^k dx = \left[-\frac{(1-x)^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 = \frac{1}{k+1}$$

Ainsi $E(X) \sim \frac{m}{k+1}$

④ $Y(\Omega) = \llbracket 1, m \rrbracket$ pour les mêmes raisons que $X(\Omega)$. Soit $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$,

$$P(Y < i) = \prod_{j=1}^k P(Y_j < i) = \prod_{j=1}^k P\left(\bigcup_{k'=1}^{i-1} Y_j = k'\right) = \prod_{j=1}^k \left(\sum_{k'=1}^{i-1} P(Y_j = k')\right) = \prod_{j=1}^k \frac{i-1}{m} = \left(\frac{i-1}{m}\right)^k$$

ainsi $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ $P(Y = i) = -P(Y < i) + P(Y < i+1) = \left(\frac{i}{m}\right)^k - \left(\frac{i-1}{m}\right)^k$

on remarque que $X(\Omega) = (m+1-Y)(\Omega)$

et $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $P(m+1-Y = i) = P(Y = m+1-i) = \left(\frac{m+1-i}{m}\right)^k - \left(\frac{m-i}{m}\right)^k = P(X=i)$

Ex 5 fin
done

$$X \sim n+1-Y$$

(5) done $E(X) = E(n+1-Y)$

or $E(n+1-Y) = n+1 - E(Y)$

done $n+1 - E(Y) = E(X)$ done $E(Y) = n+1 - E(X)$

$$E(Y) = n+1 - \sum_{j=0}^n \left(\frac{n-j}{n} \right)^k.$$

(223)

Exercice 6: Soit B_i : "une boule blanche est obtenue au tirage n° i", $\forall i \geq 1$.

① $P(X=1)=0$ car on ne peut obtenir 2 boules blanches consécutives en 1 seul tirage
 $P(X=2)=P(B_1 \cap B_2)=P(B_1) \times P(B_2)$ d'après la FPC car $P(B_1) \neq 0$
 $=P(B_1) \times P(B_2)$ car B_1 et B_2 sont indépendants (les tirages se font avec remise)
 $=\frac{3}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{9}{49}$

$P(X=3)=P(\bar{B}_1 \cap B_2 \cap B_3)=P(\bar{B}_1) \times P(B_2) \times P(B_3)$ car les $\{B_i\}_{1 \leq i \leq 3}$ sont indépendants
 $=\frac{4}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{36}{343}$

② Soit $n \geq 3$

a) $(\bar{B}_1, B_1 \cap B_2, B_1 \cap \bar{B}_2)$ est une SCE

donc $(X=n) = ((X=n) \cap \bar{B}_1) \cup ((X=n) \cap (B_1 \cap B_2)) \cup ((X=n) \cap (B_1 \cap \bar{B}_2))$
 $= \emptyset$ car $n \geq 3$

② b) donc $P(X=n) = P((X=n) \cap \bar{B}_1) + P((X=n) \cap B_1 \cap \bar{B}_2)$ car l'union est disjointe
 $= P(\bar{B}_1) \times P_{\bar{B}_1}(X=n) + P(B_1 \cap \bar{B}_2) P(X=n)$
 $= \frac{4}{7} \times P_{\bar{B}_1}(X=n) + P(B_1) \times P(B_2) P_{B_1 \cap \bar{B}_2}(X=n)$
 $= \frac{4}{7} \times P(X=n-1) + \frac{12}{49} P(X=n-2)$

En effet sachant que $\bar{B}_1$ est réalisé l'événement $X=n$ est l'événement $X=n-1$ et sachant que $B_1 \cap \bar{B}_2$, l'événement $X=n$ est l'événement $X=n-2$: il est nécessaire de réaliser $n-2$ tirages pour obtenir pour la n -ième fois 2 boules blanches consécutives une fois que l'on a obtenu une boule blanche suivie d'une boule noire.

③ $\forall n \geq 3$, on pose $u_n = P(X=n)$ et on a $u_n = \frac{4}{7} u_{n-1} + \frac{12}{49} u_{n-2}$
d'où $\forall n \geq 1, u_{n+2} - \frac{4}{7} u_{n+1} - \frac{12}{49} u_n = 0$.

(u_n) $_{n \geq 1}$ est une suite réc. lin. ord. 2

EC: $r^2 - \frac{4}{7}r - \frac{12}{49} = 0 \quad \Delta = \left(\frac{4}{7}\right)^2 + 4 \times \frac{12}{49} = \frac{16}{49} + \frac{48}{49} = \frac{64}{49} = \left(\frac{8}{7}\right)^2$

donc $r = \frac{\frac{4}{7} \pm \frac{8}{7}}{2} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$ ou $-\frac{4}{14} = -\frac{2}{7}$.

Ainsi $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \geq 1, u_n = \lambda \left(\frac{6}{7}\right)^n + \mu \left(-\frac{2}{7}\right)^n$

or $u_1 = P(X=1) = 0$ et $u_2 = P(X=2) = \frac{9}{49}$

on a donc $\begin{cases} \frac{6\lambda}{7} - \frac{2\mu}{7} = 0 \\ \frac{36\lambda}{49} + \frac{4\mu}{49} = \frac{9}{49} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \mu = 3\lambda \\ 48\lambda = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = \frac{9}{16} \\ \lambda = \frac{9}{48} = \frac{3 \times 3}{3 \times 16} = \frac{3}{16} \end{cases}$

Donc $\forall n \geq 1, P(X=n) = \frac{3}{16} \left(\frac{6}{7}\right)^n + \left(\frac{9}{16}\right) \left(-\frac{2}{7}\right)^n$