Rèfer 216

Ω = ensemble des 5 listes d'un ensemble à 12 élts

$\text{Card}(\Omega) = 12^5$

X : plus petit des numéros tirés

Y : plus grand des n^{os} tirés

$X(\Omega) = [\![1, 12]\!]$

$Y(\Omega) = [\![1, 12]\!]$

Soit $k \in X(\Omega)$. Soit J_i : la variable égale au n° du jeton tiré en ie position

$$P(X \geq k) = P(J_1 \geq k \cap J_2 \geq k \cap J_3 \geq k \cap J_4 \geq k \cap J_5 \geq k)$$

$$= P\left(\bigcap_{i=1}^{5} J_i \geq k\right) = \prod_{i=1}^{5} P(J_i \geq k)$$

évts indépdts car pas de remise

$$= \prod_{i=1}^{5} \frac{12-k+1}{12} = \left(\frac{13-k}{12}\right)^5$$

Ainsi $P(X \geq k) = \left(\frac{13-k}{12}\right)^5$

or $P(X \geq k) = P(X=k) + P(X \geq k+1)$

donc $P(X=k) = -P(X \geq k+1) + P(X \geq k)$

donc $P(X=k) = -\left(\frac{13-(k+1)}{12}\right)^5 + \left(\frac{13-k}{12}\right)^5$

$$P(X=k) = -\left(\frac{12-k}{12}\right)^5 + \left(\frac{13-k}{12}\right)^5$$

Soit $k' \in Y(\Omega)$.

$$P(Y \leq k') = P\left(\bigcap_{i=1}^{5} J_i \leq k'\right) = \prod_{i=1}^{5} P(J_i \leq k') = \prod_{i=1}^{5} \frac{k'}{12} = \left(\frac{k'}{12}\right)^5$$

ainsi $P(Y \leq k') = \left(\frac{k'}{12}\right)^5$. Or $P(Y \leq k') = P(Y=k') + P(Y \leq k'-1)$

donc $P(Y=k') = P(Y \leq k') - P(Y \leq k'-1)$

$$P(Y=k') = \left(\frac{k'}{12}\right)^5 - \left(\frac{k'-1}{12}\right)^5$$

Ex Réfec 214

1) $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ répétition de n épreuves de Bernoulli id et ind

2) $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$

3) $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ où $p = P(X=1)$.

Le mobile est en 0 à $t = 2n$ ssi il s'est autant déplacé vers la gauche que vers la droite.

$\Omega = \{-1,+1\}^{2n}$ $\text{card}(\Omega) = 2^{2n}$ il y a équiprobabilité.

$$P(X=1) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$$

en effet on cherche le nb de possibilités pour obtenir autant de dépl à d qu'à g en $2n$ déplacements :

- tout d'abord on choisit le moment des déplacements à g : $\binom{2n}{n}$ possibilités
- puis le moment des dépl à d : 1 seule possibilité $\binom{n}{n}$.

Concl : $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right)$

Ex Réfce 215

```
import random as rd
```

1)
```
def position(n,p):
    p=0
    for k in range(n):
        x = 2*rd.randint(0,1) - 1 # renvoie -1 ou 1 de manière équiprobable
        p += x
    return p
```

2) $Y_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$ $\quad Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ $\quad \forall k \in [\![0,n]\!],\ P(Y_n=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

3) $X_n = 1 \times Y_n + (-1)(n-Y_n) = Y_n - n + Y_n = 2Y_n - n.$

$X_n(\Omega) \subset [\![-n,n]\!]$

$\forall k \in [\![-n,n]\!],\quad P(X_n=k) = P(2Y_n - n = k) = P(2Y_n = k+n)$

$= P\left(Y_n = \frac{k+n}{2}\right)$

or $P\left(Y_n = \frac{k+n}{2}\right) \neq 0$ ssi $\frac{k+n}{2} \in \mathbb{N}$ et $0 \leq \frac{k+n}{2} \leq n$

or $k \in [\![-n,n]\!]$ donc $\frac{k+n}{2} \in [\![0,n]\!]$ ssi k et n sont de même parité.

Ainsi $X_n(\Omega) = \{-n+2k,\ k \in [\![0,n]\!]\}$.

$\forall j \in X_n(\Omega),\ \underset{\substack{\exists k \in [\![0,n]\!] \\ \text{tq } j=-n+2k}}{\uparrow}\ P(X_n=j) = P(X_n = -n+2k)$

$= P(2Y_n - n = -n+2k)$

$= P(2Y_n = 2k) = P(Y_n=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$= \binom{n}{\frac{j+n}{2}} p^{\frac{j+n}{2}} (1-p)^{n-\frac{(j+n)}{2}}.$

$E(X_n) = E(2Y_n - n) \underset{\text{linéarité de l'espérance}}{=} 2E(Y_n) - n = 2np - n = n(2p-1).$

4) X_n est centrée ssi $E(X_n)=0$ ssi $2p-1=0$ ssi $p=\frac{1}{2}$

La position de la puce est autant pos que nég ssi la puce a la m̄ proba d'aller à d qu'à g.