

TD34

Ex 1

Soient $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ deux familles sommables de réels positifs.

$$(1) \text{ Soit } J \in \mathcal{P}_f(I). S_J = \sum_{i \in J} (u_i + v_i) = \sum_{i \in J} u_i + \sum_{i \in J} v_i \leq \sum_{i \in I} u_i + \sum_{i \in I} v_i = M$$

car $\forall i \ 0 \leq u_i$ et $0 \leq v_i$, avec M indépendant de J .

donc $\exists M > 0$ tq $\forall J \in \mathcal{P}_f(I)$, $S_J \leq M$ et $(u_i + v_i)_{i \in I}$ est sommable.

De plus $\sup_{J \in \mathcal{P}_f(I)} S_J \leq \sum_{i \in I} u_i + \sum_{i \in I} v_i$ donc $\sum_{i \in I} (u_i + v_i) \leq \sum_{i \in I} u_i + \sum_{i \in I} v_i$

(2) Soit $\varepsilon > 0$. Caractérisation de la borne sup $\sum_{i \in I} u_i$:

$$\exists J_1 \in \mathcal{P}_f(I) \text{ tq } \sum_{i \in I} u_i - \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{i \in J_1} u_i$$

Caractérisation de la borne sup $\sum_{i \in I} v_i$: $\exists J_2 \in \mathcal{P}_f(I)$ tq $\sum_{i \in I} v_i - \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{i \in J_2} v_i$

On pose $J = J_1 \cup J_2$ - $J \in \mathcal{P}_f(I)$ et

$$\sum_{i \in J} (u_i + v_i) = \sum_{i \in J} u_i + \sum_{i \in J} v_i \geq \sum_{i \in J_1} u_i + \sum_{i \in J_2} v_i > \sum_{i \in I} u_i + \sum_{i \in I} v_i - \varepsilon$$

termes positifs

$$(3) \forall \varepsilon > 0, \sum_{i \in I} u_i + \sum_{i \in I} v_i - \varepsilon \leq \sum_{i \in J} (u_i + v_i) \leq \sum_{i \in I} (u_i + v_i) \leq \sum_{i \in I} u_i + \sum_{i \in I} v_i$$

on fait tendre ε vers 0

On obtient: $\sum_{i \in I} u_i + \sum_{i \in I} v_i = \sum_{i \in I} (u_i + v_i)$

Ex 2

① $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^3}$ CV par le th d'Eq pas car $\frac{1}{(n+1)^3} \sim \frac{1}{n^3}$ et $\sum \frac{1}{n^3}$ CV (série de Riemann avec $\alpha = 3 > 1$)

donc $\left(\frac{1}{(n+1)^3}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable par le prop 1

② $\sum_{n \geq 0} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right|$ DV car $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann DV ($\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$)

donc $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ~~CV~~ et par le prop 7, $\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas sommable

③ $\sum_{n \geq 1} \left| \frac{\sin n}{n^3} \right|$ CV par RCSTP puisque $\forall n \geq 1, 0 \leq \left| \frac{\sin n}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$ et $\sum \frac{1}{n^3}$ CV (série de Riemann avec $\alpha = 3 > 1$)

donc par le prop 7, comme $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n^3}$ CVA, $\left(\frac{\sin n}{n^3}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est sommable

Ex 3

① la famille est à termes réels positifs.

$$\forall (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad 0 \leq \frac{1}{p^2 q^3 + 1} \leq \frac{1}{p^2 q^3}$$

or $\left(\frac{1}{p^2 q^3}\right)$ est sommable d'après le th 1 a (th de Fubini, 1^{ère} partition)

car $\sum_{q \geq 1} \frac{1}{q^3}$ CV (série de Riemann avec $\alpha=3$) donc par CI $\sum_{q \geq 1} \frac{1}{p^2 q^3}$ CV $\forall p \geq 1$

et $\sum_{p \geq 1} \left(\frac{1}{p^2} \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^3} \right)$ CV puisque $\sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^2}$ CV (série de Riemann avec $\alpha=2$).

Par le th de comparaison positive, $\left(\frac{1}{p^2 q^3 + 1}\right)$ est sommable

② $\left(\frac{(-1)^p}{q^p}\right)_{(p,q) \in \mathbb{I}}$ est sommablessi $\left(\frac{1}{q^p}\right)_{(p,q) \in \mathbb{I}}$ est sommable.

or $\left(\frac{1}{q^p}\right)_{(p,q) \in \mathbb{I}}$ est sommable d'après le th 1 b (th de Fubini, 2^e partition)

car $\sum_{p \geq 2} \frac{1}{q^p}$ CV (série géométrique avec $\frac{1}{q} \in]-1, 1[$) pour tout $q \geq 2$

et $\sum_{q \geq 2} \left(\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{q^p} \right)$ CV puisque $\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{q^p} = \frac{\frac{1}{q^2}}{1 - \frac{1}{q}} = \frac{1}{q^2(1 - \frac{1}{q})} = \frac{1}{q(q-1)} \sim \frac{1}{q^2}$

(comme $\sum_{q \geq 1} \frac{1}{q^2}$ CV, par le th d'éq positive, $\sum_{q \geq 2} \frac{1}{q(q-1)}$ CV)

Calculons maintenant S avec le th 2 b :

$$S = \sum_{q=2}^{+\infty} \left(\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{q^p} \right) = \sum_{q=2}^{+\infty} \left(\sum_{p=2}^{+\infty} \left(-\frac{1}{q}\right)^p \right) = \sum_{q=2}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{q}\right)^2}{1 - \left(-\frac{1}{q}\right)}$$

$$= \sum_{q=2}^{+\infty} \frac{1}{q(q+1)} = \sum_{q=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q+1} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} \right) = \frac{1}{2}$$

somme d'une série télescopique qui CV

③ la famille est à termes positifs et elle est sommable d'après le th 1 c (th de Fubini, 3^e partition). En effet, $u_m = \sum_{p+q=m} \frac{1}{p! q! (p+q+1)}$ est finie $\forall m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \text{et } \sum_{m \geq 0} u_m \text{ CV car } u_m &= \sum_{p=0}^m \frac{1}{p! (m-p)! (m+1)} = \frac{1}{(m+1)} \sum_{p=0}^m \frac{1}{p! (m-p)!} \\ &= \frac{1}{(m+1) m!} \sum_{p=0}^m \frac{m!}{p! (m-p)!} = \frac{1}{(m+1)!} \sum_{p=0}^m \binom{m}{p} \\ &= \frac{1}{(m+1)!} \sum_{p=0}^m \binom{m}{p} 1^p 1^{m-p} = \frac{1}{(m+1)!} (1+1)^m = \frac{2^m}{(m+1)!} \\ &= \frac{2^m}{m} \times \frac{1}{m+1} = \frac{2^{m+1}}{(m+1)!} \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$

on a donc pour tout $N \geq 0$

$$S_N = \sum_{k=0}^N u_k = \sum_{k=0}^N \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N+1} \frac{2^k}{k!} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{N+1} \frac{2^k}{k!} - 1 \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} (e^2 - 1)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$(S_N)_{N \geq 0}$ CV donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ CV donc la suite est sommable

$$\text{et } S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$$

④ $\left(\frac{(-1)^{p+q}}{2^p 3^q (p+q+1)} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommablessi $\left(\frac{1}{2^p 3^q (p+q+1)} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable

D'après le th 1 © (th de Fubini, 3^e partition), comme pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \sum_{p+q=n} \frac{1}{2^p 3^q (p+q+1)} \text{ est finie et } \sum_{n \geq 0} u_n \text{ CV car}$$

$$u_n = \sum_{p=0}^n \frac{1}{2^p 3^{n-p} (n+1)} = \frac{1}{n+1} \frac{1}{3^n} \sum_{p=0}^n \left(\frac{3}{2}\right)^p = \frac{1}{(n+1)3^n} \frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{2}}$$

$$u_n = \frac{1}{(n+1)3^n} \times (-2) \times \left(1 - \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}}\right) = \frac{2}{n+1} \left(\frac{3}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{6}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{2}{n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{6}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

or $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ CV en tant que série géométrique avec $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$ donc par

cl, $\sum_{n \geq 0} 3 \left(\frac{1}{2}\right)^n$ CV et par RCSTP, $\sum_{n \geq 0} u_n$ CV. d'après le th 2 ©

Ainsi $\left(\frac{1}{2^p 3^q (p+q+1)} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p+q=n} \frac{(-1)^{p+q}}{2^p 3^q (p+q+1)} \right)$

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^n}{2^p 3^{n-p} (n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)3^n} \sum_{p=0}^n \left(\frac{3}{2}\right)^p = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)3^n} \frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{2}}$$

$$S = -2 \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)3^n} - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right]$$

$$S = -2 \left[3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{n+1} - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1} \right]$$

$$S = -2 \times 3 \left[\ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) \right] = -6 \left[\ln \frac{4}{3} - \ln \frac{3}{2} \right]$$

$$S = -6 \ln \left(\frac{4}{3} \times \frac{2}{3} \right) = -6 \ln \frac{8}{9} = 6 \ln \frac{9}{8} = 6(\ln 9 - \ln 8) = 6(\ln 3^2 - \ln(2^2 \times 2))$$

$$S = 6(2\ln 3 - 2\ln 2 - \ln 2) = 12\ln 3 - 18\ln 2$$

Rq pour $m, q \left(\frac{1}{2^p 3^q (p+q+1)} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable, on aurait pu m, q

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad 0 \leq \frac{1}{2^p 3^q (p+q+1)} \leq \frac{1}{2^p 3^q}$$

comparaison positive puisque $\left(\frac{1}{2^p 3^q} \right)$ est sommable (le montrer avec le th 1 a).

⑤ a) soit $z \in \mathbb{C}$ tq $|z| < 1$.

$(z^{2p+3q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommablessi $(|z|^{2p+3q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.

Par le th 1 a), comme on a $\forall p \in \mathbb{N}, \sum_{q \geq 0} |z|^{2p+3q} < \infty$ (en effet,

si $p \geq 0, \sum_{q \geq 0} (|z|^3)^q < \infty$ car c'est une série géométrique car $0 \leq |z|^3 < |z| < 1$)

$\bullet \sum_{p \geq 0} \sum_{q \geq 0} |z|^{2p+3q} < \infty$ car

$$\sum_{q=0}^{+\infty} |z|^{2p+3q} = \sum_{q=0}^{+\infty} (|z|^2)^p (|z|^3)^q = (|z|^2)^p \sum_{q=0}^{+\infty} (|z|^3)^q. \text{ Or } \sum_{p \geq 0} (|z|^2)^p < \infty$$

en tant que série géométrique car $0 \leq |z|^2 < |z| < 1$, donc par CL,

$$\sum_{p \geq 0} \left((|z|^2)^p \sum_{q \geq 0} (|z|^3)^q \right) < \infty \text{ également,}$$

on peut en conclure que $(|z|^{2p+3q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.

Utilisons maintenant le th 2 ① pour obtenir $S(z)$.

$$\begin{aligned} S(z) &= \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} z^{2p+3q} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(z^{2p} \sum_{q=0}^{+\infty} (z^3)^q \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(z^{2p} \frac{1}{1-z^3} \right) \\ &= \frac{1}{1-z^3} \sum_{p=0}^{+\infty} (z^2)^p = \frac{1}{1-z^3} \cdot \frac{1}{1-z^2}. \end{aligned}$$

⑤ b) Posons $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2, 2p+3q=n\}$.

$(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme une partition de $\mathbb{N}^2$.

Par le lemme (th de sommation par paquets) ②, on obtient

$$\begin{aligned} S(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{(p,q) \in I_n} z^{2p+3q} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{(p,q) \in I_n} z^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \sum_{(p,q) \in I_n} 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} (\text{card } I_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n. \end{aligned}$$

les hypothèses de la prop 10 sont vérifiées par la 4 ⑤ a).

Ex 4
7

On prouve
que
 $r \in]0, 1[$
et $\theta \in \mathbb{R}$

$(r^{|n|} e^{in\theta})_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommablessi $(r^{|n|})_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable
On utilise le prop 5 avec le partitionnement $\mathbb{Z} = \underbrace{\mathbb{N}}_{I_1} \cup \underbrace{\mathbb{Z}^*}_{I_2}$

• $(r^{|n|})_{n \in I_1} = (r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable

car la série numérique $\sum_{n \geq 0} r^n$ CV ($-1 < r < 1$).

$(r^{|n|})_{n \in I_2} = (r^{|n|})_{n \in \mathbb{Z}^*} = (r^{-n})_{n \in \mathbb{Z}^*} = (r^p)_{p \in \mathbb{N}^*}$

or $(r^p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est sommable donc $(r^{|n|})_{n \in I_2}$ aussi.

• Comme elle n'a que 2 termes, $\sum_{m=1}^2 \left(\sum_{n \in I_m} r^{|n|} \right)$ CV

Donc $(r^{|n|})$ est sommable.

Utilisons maintenant le prop 10 pour calculer S. On utilise la même partition (I_1, I_2)

$$\begin{aligned} S = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta} &= \sum_{n=0}^{+\infty} r^n e^{in\theta} + \sum_{p=1}^{+\infty} r^p e^{-ip\theta} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (re^{i\theta})^n + \sum_{p=1}^{+\infty} (re^{-i\theta})^p \\ \sum_{n \in I_1} r^{|n|} e^{in\theta} + \sum_{n \in I_2} r^{|n|} e^{in\theta} &= \frac{1}{1-re^{i\theta}} + \frac{re^{-i\theta}}{1-re^{-i\theta}} \\ &= \frac{1-re^{-i\theta} + re^{-i\theta}[1-re^{i\theta}]}{(1-re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})} \\ &= \frac{1-re^{-i\theta} + re^{-i\theta} - r^2}{1-re^{-i\theta} - re^{i\theta} + r^2} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} \end{aligned}$$

Ex 5

a) $(\frac{1}{x})_{x \in \mathbb{Q} \cap]0,1]}$ Mq cette famille n'est pas sommable.

Mq non $(\exists M \geq 0 \text{ tq } \forall J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{Q} \cap]0,1]) \text{ tq } S_J \leq M)$ c.à.d

mq $\forall M \geq 0, \exists J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{Q} \cap]0,1]) \text{ tq } \sum_{x \in J} \frac{1}{x} > M.$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $J_n \in \mathcal{P}_f(\mathbb{Q} \cap]0,1])$ définie par: $J_n = \{\frac{1}{k}, k \in [1, n]\}$

On a $S_{J_n} = \sum_{x \in J_n} \frac{1}{x} = \sum_{k=1}^n \frac{n(n+1)}{2}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{J_n} = +\infty.$

Ainsi, $\forall M \geq 0 \exists N \in \mathbb{N}$ tq si $n \geq N, S_{J_n} > M.$

$\forall M \geq 0, \exists J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{Q} \cap]0,1])$ tq $\sum_{x \in J} \frac{1}{x} > M.$ Il suffit de prendre par ex $J = J_N$

b) $\forall x \in \mathbb{Q} \cap]0,1], 0 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x^2}$ donc par le th de comparaison, comme $(\frac{1}{x})_{x \in \mathbb{Q} \cap]0,1]}$ n'est pas sommable, $(\frac{1}{x^2})_{x \in \mathbb{Q} \cap]0,1]}$ n'est pas sommable non plus.

c) $\forall x \in \mathbb{Q} \cap]0,1], 0 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x^3}$ donc par le th de comparaison, comme $(\frac{1}{x})_{x \in \mathbb{Q} \cap]0,1]}$ n'est pas sommable, $(\frac{1}{x^3})_{x \in \mathbb{Q} \cap]0,1]}$ n'est pas sommable non plus.

d) $(\frac{1}{x^2})_{x \in \mathbb{Q} \cap [1, +\infty[}$ Mq cette famille n'est pas sommable.

Mq $\forall M \geq 0, \exists J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{Q} \cap [1, +\infty[)$ tq $\sum_{x \in J} \frac{1}{x^2} > M. = \frac{k+1}{k}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $J_n \in \mathcal{P}_f(\mathbb{Q} \cap [1, +\infty[)$ définie par $J_n = \{\frac{1}{k}, k \in [1, n]\}$

on a $S_{J_n} = \sum_{x \in J_n} \frac{1}{x^2} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{k+1}\right)^2$. Comme $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$ DVG

on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{J_n} = +\infty$

Ainsi $\forall M \geq 0 \exists N \in \mathbb{N}$ tq si $n \geq N, S_{J_n} > M$

$\forall M \geq 0 \exists J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{Q} \cap [1, +\infty[)$ tq $\sum_{x \in J} \frac{1}{x^2} > M.$ Il suffit de prendre par ex $J = J_N$