Chap 35

RECHERCHES D'EXTREMA

EXC ▸ $f(x,y) = 5x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 8y$.

$U = \mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Mq f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 10x - 2y - 2$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $\mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y - 2x - 8$ donc $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe et est continue sur $\mathbb{R}^2$

et f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} 10x - 2y - 2 = 0 \\ 4y - 2x - 8 = 0 \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{7}{3} \end{cases}.$$

$f\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right) = -10$

$\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$ est 1 point critique

Vérifions si f présente en $\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$ un extremum local.

$\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2$, $\quad f\left(\frac{2}{3}+h, \frac{7}{3}+k\right) = 5\left(\frac{2}{3}+h\right)^2 + 2\left(\frac{7}{3}+k\right)^2 - 2\left(\frac{2}{3}+h\right)\left(\frac{7}{3}+k\right) - 2\left(\frac{2}{3}-h\right) - 8\left(\frac{7}{3}+k\right)$

$= \cdots\cdots = -10 - 2hk + 5k^2 + 2k^2$

d'où $f\left(\frac{2}{3}+h, \frac{7}{3}+k\right) - f\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right) = -2hk + 5h^2 + 2k^2$

$= (h-k)^2 + 4h^2 + k^2 > 0$.

Concl: f présente en $\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$ un minimum local.

EXD ▸ $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. On mq f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3x$.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} y^4 = y \\ x = y^2 \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} y(y^3-1) = 0 \\ x = y^2 \end{cases}$$

ssi $(x = 0$ et $y = 0)$ ou $(x = 1$ et $y = 1)$

$f(0,0) = 0$ et $f(1,1) = -1$. $\quad$ $(0,0)$ et $(1,1)$ sont les 2 points critiques

Vérifions si f présente en $(0,0)$ ou en $(1,1)$ un extremum local.

- en $(0,0)$: $\quad f(0,y) - f(0,0) = y^3 - 0 = y^3 \Rightarrow$ il n'y a pas d'extremum en $(0,0)$: POINT COL
- en $(1,1)$:

$\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2$, $\quad f(1+h, 1+k) - f(1,1) = (1+h)^3 + (1+k)^3 - 3(1+h)(1+k) + 1$

$= \cdots\cdots$

$= h^3 + k^3 + 3k^2 + 3h^2 - 3hk$

$= h^3 + k^3 + 3(k^2 + h^2 - hk)$

or $(k-h)^2 = k^2 + h^2 - 2hk \geq 0$ d'où $-hk \geq -\frac{k^2+h^2}{2}$

et $f(1+h, 1+k) - f(1,1) \geq h^3 + k^3 + \frac{3}{2}(k^2+h^2) \geq \frac{3}{2}(k^2+h^2) + \varepsilon(h^3+k^3)$

car au voisinage de $(1,1)$, $h^3 = h\varepsilon(h)$, $k^3 = k\varepsilon(k)$

d'où $f(1+h, 1+k) - f(1,1) \geq 0$ au voisinage de $(1,1)$

Concl: f présente en $(1,1)$ un maximum local

Exemple E :

- $f : \overbrace{[0,1]\times[0,1]}^{\text{pas un ouvert !}} \to \mathbb{R}$

  $(x,y) \longmapsto x^2+y^2-xy$

  $U =]0,1[\times]0,1[$ est un ouvert.

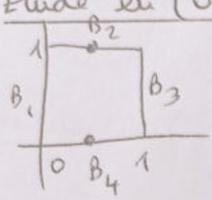
étude sur U

$\forall (x,y)\in U,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x-y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y-x=0$. f est donc $\mathcal{C}^1$ sur U.

$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ or $(0,0)\notin U$ donc f ne présente pas d'extrema en tout $(a,b)\in U$.

Étude en $(0,0)$ et sur le "bord" de $[0,1]\times[0,1]$, c'est-à-dire sur B_1, B_2, B_3, B_4

étude sur le bord de $[0,1]\times[0,1]$



- il y a un minimum en $(0,0)$ et $f(0,0)=0$.
  car $\forall (x,y)\in U, f(x,y) = (x-y)^2+xy \geq 0$ car $(x-y)^2\geq 0$ et $xy\geq 0$.
- Sur B_1 : $f(0,y)=y^2$ donc il y a un maximum en $(0,1)$ sur B_1 et $f(0,1)=1$.
- Sur B_2, $f(x,1)=x^2+1-x$

  $\frac{\partial f}{\partial x}(x,1) = 2x-1 \Rightarrow$ minimum local en $(\frac{1}{2},1)$ sur B_2 car $f(x,1)-f(\frac{1}{2},1) = x^2-x+\frac{1}{4} = (x-\frac{1}{2})^2 \geq 0$

  et $f(\frac{1}{2},1)=\frac{3}{4}$.
- Sur B_3 : $f(1,y)=y^2+1-y \Rightarrow$ minimum sur B_3 en $(1,\frac{1}{2})$ et $f(1,\frac{1}{2})=\frac{3}{4}$
- Sur B_4 : $f(x,0)=x^2 \Rightarrow$ maximum en $(1,0)$ sur B_4 et $f(1,0)=1$

CONCLUSION : f admet un max sur $[0,1]\times[0,1]$ en $(0,1)$ et $(1,0)$ qui vaut 1 et un min en $(0,0)$ qui vaut 0

Ex Refco 340

La fonction polynomiale f est continue sur D (partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$ (boule unité fermée)) donc f est bornée et atteint ses bornes.
f est donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathring{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2<1\}$ qui est un ouvert.

- On travaille sur $\mathring{D}$

Soit $(x,y) \in \mathring{D}$ $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x+y=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x+2y=0 \end{cases}$ ssi $x=y=0$.

f a donc un seul pt critique sur $\mathring{D}$: $(0,0)$.

$f(0,0)=0$

$f(x,y) = \left(x+\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$ pour tout $(x,y) \in \mathring{D}$

Donc f admet un minimum en $(0,0)$. De plus $\forall (x,y) \in D \setminus \{(0,0)\}, f(x,y)>0$
Donc le minimum de f sur D est en $(0,0)$ et vaut 0.

- On travaille maintenant sur $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2=1\}$ (le bord de D)

Posons $g : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$. ($\mathcal{C}$ est le support de la courbe paramétrée $([-\pi,\pi], g)$) On dit que g est un paramétrage de $\mathcal{C}$.

Posons $x(t) = \cos t$ et $y(t) = \sin t$ $\forall t \in [-\pi,\pi]$.

Alors $f(x(t),y(t)) = \cos^2 t + \cos t \sin t + \sin^2 t = 1 + \frac{1}{2}\sin 2t$ $\forall t \in [-\pi,\pi]$

On a déjà trouvé le minimum de f sur D.

Cherchons le maximum de f sur D. Soit $t \in [-\pi,\pi]$. Alors $2t \in [-2\pi, 2\pi]$
et $\sin 2t$ prend la valeur max 1 lorsque $2t = \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{3\pi}{2}$

Donc la valeur max de $f(x(t),y(t))$ est obtenue en $t = \frac{\pi}{4}$ ou $-\frac{3\pi}{4}$

Donc le maximum de f est atteint aux points $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et il vaut $\frac{3}{2}$.

Concl : f atteint sur D son min en $(0,0)$ et son max en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Réfa 341

1) déjà fait dans le cours) • f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en tant que quotient défini de fcts cont
• f est continue en $(0,0)$ car $|f(x,y)| \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0 = f(0,0)$

2) • Par opérations sur les fonctions admettant des dérivées partielles, f admet des dérivées partielles en tout point de l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

• en $(0,0)$:

$\lim\limits_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0$ donc f admet une dérivée partielle en $(0,0)$ par rapport à la $1^{ère}$ variable et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. En effet $\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{0-0}{t} = 0$

et $\lim\limits_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0$ donc f admet une dérivée partielle en $(0,0)$ par rapport à sa 2^e variable et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Concl : f admet des dérivées partielles par rapport à ses 2 variables sur $\mathbb{R}^2$

3) f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ ssi $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Or $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy\,\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \times 2x}{x^2+y^2}$

$= \frac{y(x^2+y^2) - x^2 y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ est-elle continue en 0 ? Envisageons une manière particulière de s'approcher du pt $(0,0)$

on remarque que si $x \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \frac{x^3}{(2x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^3}{2^{3/2}x^3} = \frac{1}{2^{3/2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas cont en $(0,0)$

Donc f n'est pas $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Réfce 342

1) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x^2+y^2-xy-\frac{1}{2}(x^2+y^2) = \frac{1}{2}(x^2+y^2-2xy) = \frac{1}{2}(x-y)^2 \geq 0$

Donc $x^2+y^2-xy \geq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$

2) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x^2+y^2-xy = 0 \overset{1)}{\Leftrightarrow} x^2+y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0$.

Ainsi f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$\forall (x,y) \neq (0,0) \qquad 0 \leq f(x,y) \leq \frac{2y^4}{\sqrt{x^2+y^2}^3} \leq 2\frac{(x^2+y^2)^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$

Donc f est cont en $(0,0)$.

D'après les th gaux, f cont sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (quotient défini de fonctions continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$) $\Rightarrow$ f est cont sur $\mathbb{R}^2$

3) f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-y^4(2x-y)}{2[x^2+y^2-xy]^{3/2}}$

par th gaux (quotient défini de fcts $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$) $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y^5-3xy^4+4x^2y^3}{(x^2+y^2-xy)^2}$

4) $\forall x \neq 0 \quad \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0

$\forall y \neq 0 \quad \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = y \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et vaut 0.

5) mq $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont cont sur $\mathbb{R}^2$. Mq $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont cont en $(0,0)$.
puisque $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont cont sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en tant que quotient défini de fcts continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. inég tri aug

$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \overset{1)}{\leq} \frac{y^4|2x-y| \times 2^2}{(x^2+y^2)^2} \leq 4\frac{\sqrt{x^2+y^2}^4 (|2x|+|y|)}{\sqrt{x^2+y^2}^4}$

$\leq 4(2+1)\sqrt{x^2+y^2} = 12\sqrt{x^2+y^2} \underset{(x,y)\to 0}{\longrightarrow} 0$

$|a-b| \leq |a|+|b|$

$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq 4\frac{|2y^5-3xy^4+4x^2y^3|}{(x^2+y^2)^2}$ inég tri aug $\leq \frac{4(2+3+4)\sqrt{x^2+y^2}^5}{\sqrt{x^2+y^2}^4}$

$= 36\sqrt{x^2+y^2} \underset{(x,y)\to 0}{\longrightarrow} 0$

Donc $\lim \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

et $\lim \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

$\Rightarrow f$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Ex 345

① voir après ③

② Déterminer $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant :

$$2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 y \quad (E)$$

on pose $\begin{cases} u = x \\ v = x + 2y \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x = u \\ y = \frac{v-u}{2} \end{cases}$

Soit $\varphi : (x,y) \mapsto (u,v)$. φ est bijective et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et sa bijection réciproque l'est aussi.

$$\begin{tikzcd} (x,y) \arrow[r, mapsto, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, mapsto, "f = g\circ\varphi"'] & (u,v) \arrow[r, mapsto, "g"] & g(u,v) = f(x,y) \end{tikzcd}$$

$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$
$\Downarrow$
. $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$

$g = f \circ \varphi^{-1}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

$$= \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\cdot\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$

$$= 2\frac{\partial g}{\partial v}(u,v).$$

f sol de (E) ssi g sol de $2\left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \cancel{\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)}\right) - \left(\cancel{2\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)}\right) = \frac{u^2(v-u)}{2}$

ssi $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{u^2 v}{4} - \frac{u^3}{4}$

$\Rightarrow g : (u,v) \mapsto \frac{u^3 v}{12} - \frac{u^4}{16} + h(v)$ avec $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$

$\Rightarrow f : (x,y) \mapsto \frac{x^3(x+2y)}{12} - \frac{x^4}{16} + h(x+2y)$

$\Rightarrow f : (x,y) \mapsto \frac{x^4}{48} + \frac{x^3 y}{6} + h(x+2y)$.

Réciproquement,
On montre que f définie comme ci-dessus est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et vérifie (E). En effet, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$2\frac{x^3}{12} + 2\frac{x^2 y}{2} + 2h'(x+2y) - \left(\frac{x^3}{6} + 2h'(x+2y)\right) = x^2 y.$$

Conclusion : $S = \left\{ f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \frac{x^4}{48} + \frac{x^3 y}{6} + h(x+2y) \end{array} \text{ avec } h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \right\}$

Ex 345

③ $$(r,\theta) \overset{\varphi}{\longmapsto} (\underbrace{r\cos\theta}_{\varphi_1(r,\theta)}, \underbrace{r\sin\theta}_{\varphi_2(r,\theta)}) \longmapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$g = f\circ\varphi$$

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

f sol de l'Eq ssi $r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = r \quad \forall (r,\theta)$ ssi $\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 1 \ \forall (r,\theta)$

ssi $\exists\, h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ tq $g(r,\theta) = r + h(\theta)$. $\forall (r,\theta)$

ssi $\exists\, h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ tq $\forall (x,y)$ $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + h\left(\arctan \frac{y}{x}\right)$

① $$(x,y) \overset{\varphi}{\longmapsto} (u,v) \overset{g}{\longmapsto} g(u,v) = f(x,y)$$

$$f = g\circ\varphi$$

on pose $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$ $\quad \varphi : (x,y) \mapsto (u,v)$ est bijective et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et sa bijection réciproque l'est aussi.

$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ donc $g = f\circ\varphi^{-1}$ est aussi $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \times \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$
$$= \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\times\frac{1}{2} + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\times\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\cdot\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$
$$= \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\times\frac{1}{2} + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$

f sol de (E) ssi g sol de " $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 0 \quad \forall (u,v)\in\mathbb{R}^2$ "

Ainsi $g : (u,v) \longmapsto h(v)$ avec $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$

donc $f : (x,y) \mapsto h(x-y)$

Réciproquement, on montre que $f : (x,y) \mapsto h(x-y)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et vérifie (E).

En effet, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\overbrace{h(x-y)}^{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)} - \overbrace{h(x-y)}^{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)} = 0$

Conclusion : $S = \left\{ f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto h(x-y) \end{array} \text{ avec } h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \right\}$